

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014年11月28日

最終更新：2014年12月9日 08:36

この講義のねらい

解きやすい問題

多項式時間解法が存在する

解きにくい問題

NP 困難性が証明されている

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

→ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

部分的な回答

問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

「多面体構造」が「美しい」→ 凸多面体の整数性

整数計画問題の線形計画緩和

観察 (再掲)

(P) の最適値 ≤ (LP) の最適値 = (DLP) の最適値 ≤ (D) の最適値

特に,

(P) の最適値 = (LP) の最適値 かつ (DLP) の最適値 = (D) の最適値 →

(P) の最適値 = (LP) の最適値 = (DLP) の最適値 = (D) の最適値

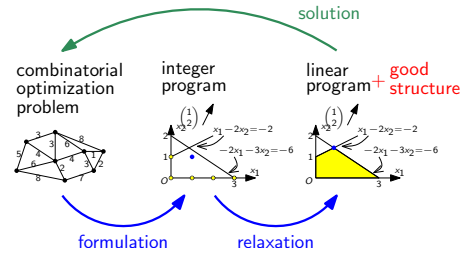
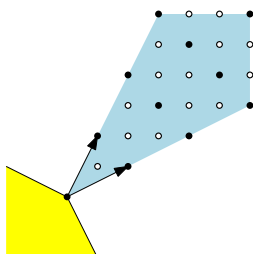
つまり, 次の2つが成り立つ場合が重要

- ▶ (P) の最適値 = (LP) の最適値
- ▶ (DLP) の最適値 = (D) の最適値

双対問題の整数性と Hilbert 生成系

双対問題 (DLP) の整数性は以下のように解釈 (あるいは定義) できる

- ▶ (LP) の許容領域 $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ の任意の面 F を考える
- ▶ 任意の $x \in F$ に対して, $Ax \leq b$ を構成する不等式 $a_i^T x \leq b_i$ で $a_i^T x = b_i$ を満たすものをすべて考える
- ▶ 双対問題の整数性: これらの a_i が F の法錐の Hilbert 生成系である



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決

整数計画問題の線形計画緩和

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題: (P)

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Ax \leq b, \\ & && x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

(DLP) + 整数制約: (D)

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && b^T y \\ & \text{subject to} && A^T y = c, y \geq 0, \\ & && y \in \mathbb{Z}^m \end{aligned}$$

(P) の線形計画緩和: (LP)

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Ax \leq b \end{aligned}$$

(LP) の双対問題: (DLP)

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && b^T y \\ & \text{subject to} && A^T y = c, y \geq 0 \end{aligned}$$

観察

(P) の最適値 ≤ (LP) の最適値 = (DLP) の最適値 ≤ (D) の最適値

整数計画問題の線形計画緩和

観察 (再掲)

(P) の最適値 ≤ (LP) の最適値 = (DLP) の最適値 ≤ (D) の最適値

特に,

(P) の最適値 = (LP) の最適値 かつ (DLP) の最適値 = (D) の最適値 →

(P) の最適値 = (LP) の最適値 = (DLP) の最適値 = (D) の最適値

つまり, 次の2つが成り立つ場合が重要

- ▶ (P) の最適値 = (LP) の最適値
 - ▶ (DLP) の最適値 = (D) の最適値
- ←← 整凸多面体
←← 法錐の Hilbert 生成系

主問題の整数性

(前回の復習)

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題: (P)

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Ax \leq b, \\ & && x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

(DLP) + 整数制約: (D)

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && b^T y \\ & \text{subject to} && A^T y = c, y \geq 0, \\ & && y \in \mathbb{Z}^m \end{aligned}$$

(P) の線形計画緩和: (LP)

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Ax \leq b \end{aligned}$$

(LP) の双対問題: (DLP)

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && b^T y \\ & \text{subject to} && A^T y = c, y \geq 0 \end{aligned}$$

(LP) の整数性: すべての座標が整数となる最適解 (整数最適解) が存在

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題 : (P)

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^\top x \\ & \text{subject to} && Ax \leq b, \\ & && x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

(DLP) + 整数制約 : (D)

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && b^\top y \\ & \text{subject to} && A^\top y = c, y \geq 0, \\ & && y \in \mathbb{Z}^m \end{aligned}$$

(P) の線形計画緩和 : (LP)

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^\top x \\ & \text{subject to} && Ax \leq b \end{aligned}$$

(LP) の双対問題 : (DLP)

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && b^\top y \\ & \text{subject to} && A^\top y = c, y \geq 0 \end{aligned}$$

観察

(LP) の許容領域が整凸多面体 \Rightarrow
 任意の $c \in \mathbb{R}^n$ に対して, (LP) は整数最適解を持つ

目次

① 完全双対整数性

② 完全ユニモジュラ行列

③ 完全ユニモジュラ行列の例

④ 今日のまとめ

完全双対整数性と Hilbert 生成系

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$, 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

命題 (完全双対整数性と Hilbert 生成系の関係)

不等式系 $Ax \leq b$ が完全双対整数性を持つ \Leftrightarrow
 P の任意の非空な面 $F \subseteq P$ に対して,
 ベクトルの集合 $\{a_i \in \mathbb{Z}^n \mid a_i x = b_i, \forall x \in F\}$ は法錐 N_F の Hilbert 生成系

これは前回の議論から分かる (ので, 証明は省略)

補題 1 の証明 (1)

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$, 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

補題 1

P は整凸多面体 \Leftrightarrow
 任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して次の最適化問題の最適値が整数

$$\begin{aligned} \text{(LP)} \quad & \text{maximize} && c^\top x \\ & \text{subject to} && Ax \leq b \end{aligned}$$

\Rightarrow の証明 : P が整凸多面体であると仮定

- ▶ 任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して, (LP) の最適解集合は P の面 (F とする)
- ▶ F は頂点を含む (その頂点を v とする)
- ▶ P は整凸多面体なので, v の各成分は整数
- ▶ \therefore 最適値 $c^\top v$ も整数 □

今日の目標

完全双対整数性を理解する

- ▶ 重要概念 : 完全ユニモジュラ行列

完全双対整数性

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$, 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

完全双対整数性とは?

不等式系 $Ax \leq b$ が完全双対整数性 (total dual integrality) を持つ,
 (あるいは, TDI (totally dual integral) である) とは,
 任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して, 次の最適化問題が整数最適解を持つ

$$\begin{aligned} \text{(DLP)} \quad & \text{minimize} && b^\top y \\ & \text{subject to} && A^\top y = c, y \geq 0 \end{aligned}$$

完全双対整数性と整凸多面体

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$, 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

命題 (完全双対整数性と整凸多面体)

不等式系 $Ax \leq b$ が完全双対整数性を持つ $\Rightarrow P$ は整凸多面体

証明には次の補題を使う

補題 1

P は整凸多面体 \Leftrightarrow
 任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して次の最適化問題の最適値が整数

$$\begin{aligned} \text{(LP)} \quad & \text{maximize} && c^\top x \\ & \text{subject to} && Ax \leq b \end{aligned}$$

補題 1 の証明 (2)

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$, 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

補題 1

P は整凸多面体 \Leftrightarrow
 任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して次の最適化問題の最適値が整数

$$\begin{aligned} \text{(LP)} \quad & \text{maximize} && c^\top x \\ & \text{subject to} && Ax \leq b \end{aligned}$$

\Leftarrow の証明 : 任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して (LP) の最適値が整数であると仮定

- ▶ 頂点 $v \in P$ を 1 つ選ぶ
- ▶ v を (LP) の唯一の最適解とするような目的関数方向 $c \in \mathbb{Z}^n$ を考える (演習問題: そのような整数ベクトル c が必ず存在する)
- ▶ 仮定より, $c^\top v$ は整数
- ▶ 他の頂点 $u \in P$ を考えると, $c^\top v > c^\top u$ ($\because u$ は c を目的関数方向とする (LP) の最適解ではない)

- ▶ 場合分け: $v_1 \geq u_1$ のとき, 十分大きな整数 t に対して,

$$tc^T v + v_1 > tc^T u + u_1$$

- ▶ 場合分け: $v_1 < u_1$ のとき, 十分大きな整数 t に対して,

$$tc^T v + v_1 > tc^T u + u_1$$

- ▶ すなわち, 十分大きな正整数 t に対して, $\tilde{c} \in \mathbb{Z}^n$ を

$$\tilde{c}_1 = tc_1 + 1, \tilde{c}_2 = tc_2, \dots, \tilde{c}_n = tc_n$$

と定義すると,

v は \tilde{c} を目的関数方向とする (LP) に対しても唯一の最適解

- ▶ このとき, $\tilde{c}^T v = tc^T v + v_1$ であり, 仮定より, $\tilde{c}^T v$ も整数
- ▶ したがって, v_1 は整数
- ▶ 同様な考察から, v_2, \dots, v_n は全部整数
- ▶ したがって, v のすべての成分は整数であり, P は整凸多面体 \square

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$, 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

命題 (完全双対整数性と整凸多面体)

不等式系 $Ax \leq b$ が完全双対整数性を持つ $\Rightarrow P$ は整凸多面体

証明には次の補題を使う

補題 1

P は整凸多面体 \Leftrightarrow

任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して次の最適化問題の最適値が整数

$$\begin{aligned} \text{(LP)} \quad & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Ax \leq b \end{aligned}$$

補題の証明が終わった

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$, 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

注意: 用語の使い方

- ▶ P が整凸多面体である \quad — 凸多面体の性質
- ▶ $Ax \leq b$ が完全双対整数性を持つ \quad — 不等式系の性質

「凸多面体」とそれを定義する「不等式系」の違いに注意

- ▶ つまり, 冗長な不等式が意味を持っている

疑問

どのような不等式系 $Ax \leq b$ が完全双対整数性を持っているのか?

1つの答え:

A が完全ユニモジュラ行列であるとき

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$, 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

命題 (完全双対整数性と整凸多面体)

不等式系 $Ax \leq b$ が完全双対整数性を持つ $\Rightarrow P$ は整凸多面体

証明: $Ax \leq b$ が完全双対整数性を持つと仮定する

- ▶ 任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ を考える
- ▶ 不等式系の完全双対整数性より, (DLP) は整数最適解を持つ
- ▶ すなわち, (DLP) の最適値は整数
- ▶ 強双対定理より, (LP) の最適値も整数
- ▶ 補題 1 より, P は整凸多面体 \square

① 完全双対整数性

② 完全ユニモジュラ行列

③ 完全ユニモジュラ行列の例

④ 今日のまとめ

完全ユニモジュラ行列とは?

行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ が**完全ユニモジュラ** (totally unimodular) であるとは, A の任意の正方部分行列の行列式が $0, 1, -1$ のいずれかであること

$$\text{例: } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- ▶ 1 次の正方部分行列の行列式: 1 か 0
- ▶ 2 次の正方部分行列の行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

よって, A は完全ユニモジュラ

完全ユニモジュラ行列とは？

行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ が完全ユニモジュラ (totally unimodular) であるとは、 A の任意の正方部分行列の行列式が $0, 1, -1$ のいずれかであること

例: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- ▶ 1 次の正方部分行列の行列式: 1 か 0 か -1
- ▶ 2 次の正方部分行列の行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

よって、 A は完全ユニモジュラではない

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$, 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

補題 2 (完全ユニモジュラ行列と整凸多面体)

A が完全ユニモジュラ $\Rightarrow P$ の任意の頂点は整数座標しか持たない

これは前回の結果と完全ユニモジュラ行列の定義から分かる

前回の結果 (再掲)

A の任意の n 次正方部分行列の行列式 $= -1, 0, 1 \Rightarrow P$ の任意の頂点は整数座標しか持たない (つまり, P は整凸多面体)

A が完全ユニモジュラ $\Rightarrow A$ の任意の n 次正方部分行列の行列式 $= -1, 0, 1$

証明すること

$A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ が完全ユニモジュラ $\Rightarrow [A \ I] \in \mathbb{Z}^{m \times (n+m)}$ も完全ユニモジュラ

$[A \ I]$ の k 次正方部分行列 S を考える ($1 \leq k \leq m$)

- ▶ つまり, A のある部分行列 $A' \in \mathbb{Z}^{k \times k'}$ と I のある部分行列 $I' \in \mathbb{Z}^{k \times (k-k')}$ を使って, $S = [A' \ I']$ になっている
- ▶ 考えたい量は S の行列式
- ▶ 行や列を入れ替えても行列式の絶対値は変わらないので, 入れ替えて S を次のように変形

$$S = [A' \ I'] \rightsquigarrow \begin{bmatrix} S' & 0 \\ 0 & I'' \end{bmatrix} \quad \text{ただし, } I'' \text{ は (小さな) 単位行列}$$

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$, 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

補題 4 (完全ユニモジュラ行列と双対問題の整数性)

A が完全ユニモジュラ \Rightarrow 任意の $b \in \mathbb{Z}^m, c \in \mathbb{Z}^n$ に対して, 次の最適化問題が整数最適解を持つ

$$\begin{aligned} \text{(DLP)} \quad & \text{minimize} && b^T y \\ & \text{subject to} && A^T y = c, y \geq 0 \end{aligned}$$

証明:

- ▶ $A^T y = c \Leftrightarrow A^T y \leq c$ かつ $-A^T y \leq -c$
- ▶ したがって, (DLP) は次の問題 (DLP') と同じ

$$\begin{aligned} \text{(DLP')} \quad & \text{minimize} && b^T y \\ & \text{subject to} && A^T y \leq c, -A^T y \leq -c, y \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ (DLP') の許容領域を Q とする

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$, 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

命題 (完全ユニモジュラ行列と完全双対整数性)

A が完全ユニモジュラ \Rightarrow 任意のベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$ に対して不等式系 $Ax \leq b$ は完全双対整数性を持つ (つまり, 任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して (DLP) が整数最適解を持つ)

証明: 次のステップを踏む

補題 3

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ が完全ユニモジュラ \Rightarrow

- (1) $A^T \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ も完全ユニモジュラ
- (2) $-A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ も完全ユニモジュラ
- (3) $[A \ I] \in \mathbb{Z}^{m \times (n+m)}$ も完全ユニモジュラ
- (4) $[A \ -A] \in \mathbb{Z}^{m \times (n+n)}$ も完全ユニモジュラ

(3) だけ証明する

- ▶ (1), (2), (4) は演習問題

$$S = \begin{bmatrix} A' & I' \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} S' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

- ▶ 変形後の行列の行列式は S' の行列式に等しい
- ▶ S' はある列を 0 ベクトルとするか, A' の正方部分行列 (の行を入れ替えたもの)
 - ▶ 前者の場合, S' の行列式は 0
 - ▶ 後者の場合, S' の行列式は $0, 1, -1$ のいずれか ($\because A$ が完全ユニモジュラ)
- ▶ したがって, S の行列式も $0, 1, -1$ のいずれか □

証明 (続き):

- ▶ つまり, $Q = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \mid \begin{bmatrix} A^T \\ -A^T \end{bmatrix} y \leq \begin{bmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$
- ▶ $A' = \begin{bmatrix} A^T \\ -A^T \\ -I \end{bmatrix}, c' = \begin{bmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{bmatrix}$ と置き直すと, $Q = \{y \in \mathbb{R}^m \mid A'y \leq c'\}$
- ▶ 補題 3 より, A' は完全ユニモジュラ
- ▶ c' は整数ベクトルなので, 補題 2 より, Q の任意の頂点は整数座標しか持たない
- ▶ つまり, (DLP) は必ず整数最適解を持つ □

行列 $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, ベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$, 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

注意：用語の使い方

- ▶ P が凸多面体である — 凸多面体の性質
- ▶ $Ax \leq b$ が完全双対整数性を持つ — 不等式系の性質
- ▶ A が完全ユニモジュラである — 行列の性質

「凸多面体」、「不等式系」とそれを定義する「行列」の違いに注意

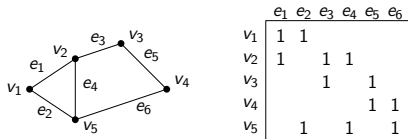
無向グラフの接続行列

無向グラフ $G = (V, E)$

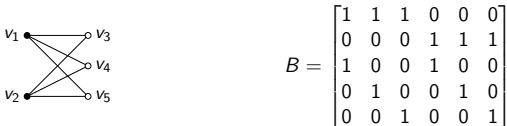
接続行列とは？

G の接続行列とは、行列 $B \in \{0, 1\}^{V \times E}$ で
任意の $v \in V, e \in E$ に対して $B_{v,e}$ を次のように定義したもの

$$B_{v,e} = \begin{cases} 0 & (v \text{ は } e \text{ の端点ではない}), \\ 1 & (v \text{ は } e \text{ の端点である}) \end{cases}$$



二部グラフの接続行列は完全ユニモジュラ：例



例えば、第 1, 4 行と第 2, 3 列から作られる B の部分行列 B' の行列式は

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

二部グラフの接続行列は完全ユニモジュラ：証明 (2)

B の任意の $k+1$ 次正方部分行列 B' を考える

場合分け

- 1 B' が 0 ベクトルを列として持つ
- 2 そうでないとき、 B' が 1 が 1 つだけある列を持つ
- 3 そうでないとき、 B' のどの列にも 1 が 2 つある

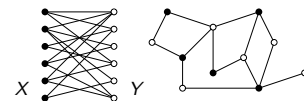
- ① 完全双対整数性
- ② 完全ユニモジュラ行列
- ③ 完全ユニモジュラ行列の例
- ④ 今日のまとめ

二部グラフの接続行列は完全ユニモジュラ

二部グラフの接続行列は完全ユニモジュラ

G が二部グラフ $\Rightarrow G$ の接続行列 B は完全ユニモジュラ

補足： $G = (V, E)$ が二部グラフであるとは、 V を X と Y に分割して
どの辺も X の頂点同士、 Y の頂点同士を結ばないようにできるもの



二部グラフの接続行列は完全ユニモジュラ：証明 (1)

B の k 次正方部分行列 B' を考える

証明の方針

k に関する帰納法

基底段階： $k=1$ のとき

B' は B の 1 つの成分で構成される

- ▶ B の各成分は 0 か 1 なので、 B' の行列式も 0 か 1 □

帰納段階： $k \geq 1$ のとき

B の任意の k 次正方部分行列の行列式が 0, 1, -1 のいずれかであると仮定

- ▶ 証明すること： B の任意の $k+1$ 次正方部分行列 B' の行列式が 0, 1, -1 のいずれかになること

二部グラフの接続行列は完全ユニモジュラ：証明 (3)

B の任意の $k+1$ 次正方部分行列 B' を考える

場合分け

- 1 B' が 0 ベクトルを列として持つ

このとき、 $\det(B') = 0$

例：第 2,3,4 行と第 3,4,5 列が作る部分行列 B' に対して

$$\det(B') = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

B の任意の $k+1$ 次正方部分行列 B' を考える

場合分け

2 そうでないとき、 B' が 1 が 1 つだけある列を持つ

- ▶ その列の他の成分はすべて 0 (先ほどの場合ではないから)
- ▶ その列に関して余因子展開を行うと、 B の k 次正方部分行列が出てきて、帰納法の仮定から、 $\det(B')$ が 1, 0, -1 のいずれかであると分かる

例：第 1, 2, 4 行と第 3, 4, 5 列が作る部分行列 B' に対して

$$\det(B') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

B の任意の $k+1$ 次正方部分行列 B' を考える

場合分け

3 そうでないとき、 B' のどの列にも 1 が 2 つある

- ▶ このとき、 $y^T B' = 0$
- ▶ したがって、 B' の列ベクトルは線形従属であり、 $\det(B') = 0$

$$y^T B' = (1, 1, -1, -1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0, 0, 0, 0)$$

まとめ

すべての場合で $\det(B')$ は 0, 1, -1 のいずれか □

今日の目標

今日の目標

完全双対整数性を理解する

- ▶ 重要概念：完全ユニモジュラ行列

整数計画問題の線形計画緩和

観察 (再掲)

(P) の最適値 \leq (LP) の最適値 = (DLP) の最適値 \leq (D) の最適値

特に、

(P) の最適値 = (LP) の最適値 かつ (DLP) の最適値 = (D) の最適値 \Rightarrow

(P) の最適値 = (LP) の最適値 = (DLP) の最適値 = (D) の最適値

つまり、次の 2 つが成り立つ場合が重要

- ▶ (P) の最適値 = (LP) の最適値 ← 整凸多面体
- ▶ (DLP) の最適値 = (D) の最適値 ← 法錐の Hilbert 生成系

特に重要な場合

(LP) の許容領域を記述する不等式系が完全双対整数性を持つとき

B の任意の $k+1$ 次正方部分行列 B' を考える

場合分け

3 そうでないとき、 B' のどの列にも 1 が 2 つある

- ▶ B' の各行は G の頂点に対応、各列は G の辺に対応
- ▶ つまり、 X の頂点に対応する行と Y の頂点に対応する行がある
- ▶ ここで、ベクトル $y \in \mathbb{R}^{k+1}$ を次で定める

$$v \text{ が } X \text{ の頂点のとき、 } y_v = 1, \quad v \text{ が } Y \text{ の頂点のとき、 } y_v = -1$$

例：第 1, 2, 3, 4 行と第 1, 2, 4, 5 列が作る部分行列を B' として

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

このとき、 $y^T = (1, 1, -1, -1)$

目次

1 完全双対整数性

2 完全ユニモジュラ行列

3 完全ユニモジュラ行列の例

4 今日のまとめ

整数計画問題の線形計画緩和

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数、 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Ax \leq b, \\ & && x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

(DLP) + 整数制約：(D)

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && b^T y \\ & \text{subject to} && A^T y = c, y \geq 0, \\ & && y \in \mathbb{Z}^m \end{aligned}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Ax \leq b \end{aligned}$$

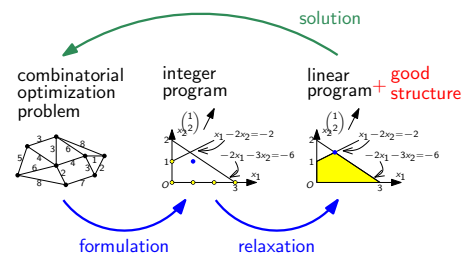
(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && b^T y \\ & \text{subject to} && A^T y = c, y \geq 0 \end{aligned}$$

観察

(P) の最適値 \leq (LP) の最適値 = (DLP) の最適値 \leq (D) の最適値

この講義のねらい：流れ



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決 ←次回もココ