離散最適化基礎論 第 4 回
凸多面体の整数性

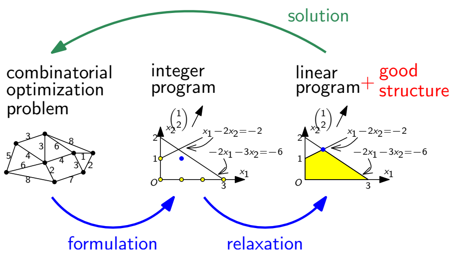
岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 10 月 31 日

最終更新：2014 年 10 月 31 日　11:07

この講義のねらい：流れ



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察 ←今日もココ
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決

この講義のねらい

解きやすい問題	解きにくい問題
多項式時間解法が存在する	NP 困難性が証明されている

疑問
どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

部分的な回答
問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

多面体 ＝ 線形計画問題の許容領域

今回と次回の内容：次の疑問に答える
「多面体」とは何か？ 「多面体構造」とは何か？

今日の目標

今日の目標
凸多面体と不等式系の関係を理解する
- 重要概念：ファセット定義不等式

凸多面体の整数性を理解し，組合せ最適化における重要性を説明できる
- 重要概念：整凸多面体
- 重要概念：整凸包

目次

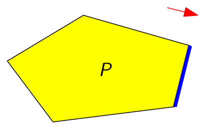
線形計画法と面

設定
- 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$
- 非空な凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$

命題
次の線形計画問題 (P) を考える (ただし，$x \in \mathbb{R}^n$ は変数)

$$\begin{array}{lll} \text{maximize} & c^\top x & \\ \text{subject to} & Ax \leq b & (\text{つまり}, x \in P) \end{array}$$

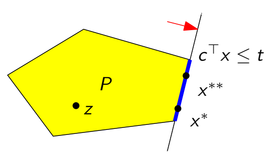
このとき，(P) の最適解全体の集合は凸多面体 P の面である



注：P は有界で非空なので，
(P) は必ず最適解を持つ

証明

- $x^* \in \mathbb{R}^n$ を (P) の最適解とする
- $t = c^\top x^*$ とする (つまり，t は (P) の最適値)
- (P) の任意の最適解 $x^{**} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$c^\top x^{**} = t$
- すなわち，$F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^\top x = t\}$ は (P) の最適解集合
- 最適解の定義より，任意の $z \in P$ に対して，$c^\top z \leq c^\top x^* = t$
- すなわち，$c^\top x \leq t$ は P に対する妥当不等式
- したがって，F は P の面 □

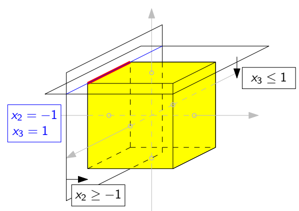


面の記述

設定
- 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$
- 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$
- 「$Ax \leq b$」の第 i 行 $a_i^\top x \leq b_i$

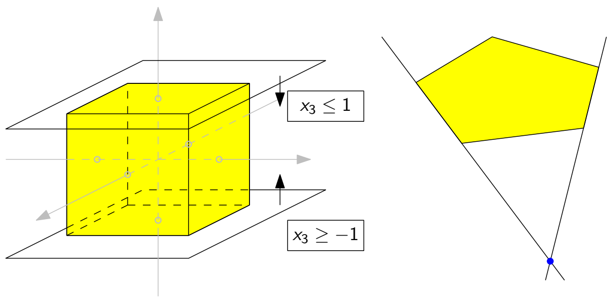
事実
F が P の面 $\Rightarrow$ ある $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ が存在して

$$F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\top x = b_i \ \forall\, i \in I\}$$



面の記述：注意

逆が成り立つとは限らない



頂点の記述

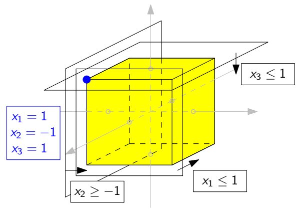
設定

- 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$
- 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$，$\dim(P) = n$
- 「$Ax \le b$」の第 i 行 $a_i^\top x \le b_i$

事実

v が P の頂点 $\Rightarrow$ ある $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ が存在して，$|I| = n$ であり，かつ

$$\{v\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\top x = b_i \ \forall\, i \in I\}$$



逆が成り立つとは限らない

ファセットの記述

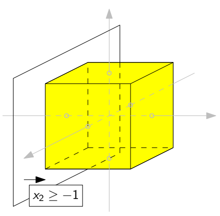
設定

- 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$
- 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$，$\dim(P) = n$
- 「$Ax \le b$」の第 i 行 $a_i^\top x \le b_i$

事実

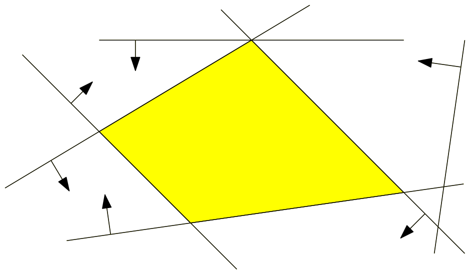
F が P のファセット $\Rightarrow$ ある $i \in \{1, \dots, m\}$ が存在して，

$$F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\top x = b_i\}$$



ファセットの記述：注意

逆が成り立つとは限らない



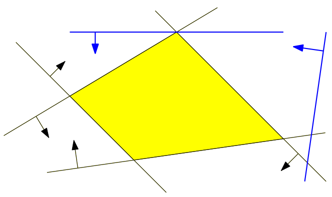
冗長な不等式

設定

- 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$
- 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$
- 「$Ax \le b$」の第 i 行 $a_i^\top x \le b_i$

冗長な不等式とは

$a_i^\top x \le b_i$ が P に対する冗長な不等式であるとは
$Ax \le b$ から $a_i^\top x \le b_i$ を取り除いた不等式系 $A'x \le b'$ に対して
$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x \le b'\}$ が成り立つこと



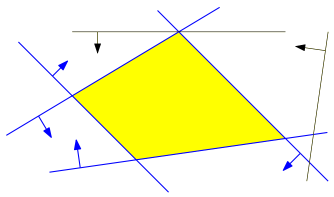
ファセット定義不等式

設定

- 行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$
- 凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$
- 「$Ax \le b$」の第 i 行 $a_i^\top x \le b_i$

ファセット定義不等式とは

$a_i^\top x \le b_i$ が P のファセット定義不等式であるとは
$P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\top x = b_i\}$ が P のファセットであること

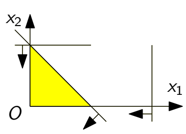


冗長な不等式と線形計画問題

次の線形計画問題 (P0) を考える

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \le 1, \\ & x_1 \le 2, x_2 \le 1, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



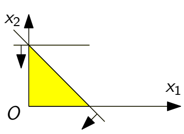
最適解 $(x_1, x_2) = (0, 1)$，最適値 2

冗長な不等式と線形計画問題

(P1)：(P0) から冗長な不等式を 1 つ取り除いた

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \le 1, \\ & x_2 \le 1, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

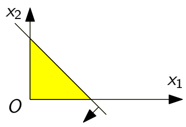


許容集合は変わらない ($\therefore$ 最適解も変わらない)

(P2)：(P1) から冗長な不等式を 1 つ取り除いた

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \le 1, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

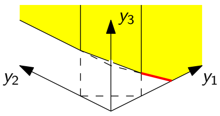


許容集合は変わらない ($\therefore$ 最適解も変わらない)

(D0)：(P0) の双対問題

$y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & y_1 + 2y_2 + y_3 \\ \text{subject to} \quad & y_1 + y_2 \ge 1, y_1 + y_3 \ge 2, \\ & y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

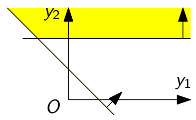


最適解 $(y_1, y_2, y_3) \in \mathrm{conv}\{(1,0,1),(2,0,0)\}$，最適値 2

(D1)：(P1) の双対問題

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & y_1 + y_2 \\ \text{subject to} \quad & y_1 + y_2 \ge 1, y_2 \ge 2, \\ & y_1 \ge 0, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$



最適解 $(y_1, y_2) = (-1, 2)$，最適値 2

(D2)：(P2) の双対問題

$y_1 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & y_1 \\ \text{subject to} \quad & y_1 \ge 1, y_1 \ge 2, y_1 \ge 0 \end{aligned}$$

最適解 $y_1 = 2$，最適値 2

主問題 (P)，双対問題 (D)

- (P) の許容領域から冗長な不等式を取り除いても，(P) の許容領域は変わらない
- (P) の許容領域から冗長な不等式を取り除くと，(D) が変わる

$\rightsquigarrow$ 冗長な不等式は (P) においては「無駄」であるが (D) においては「無駄」でないかもしれない…
$\rightsquigarrow$ 次回以降

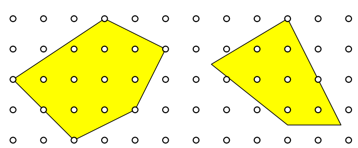
目次

凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$

整凸多面体とは？

P が整凸多面体であるとは，
P のすべての面が整数点を含むこと
(P は有界なので，P のすべての頂点が整数点であることと同値)

整数点：すべての座標が整数である点



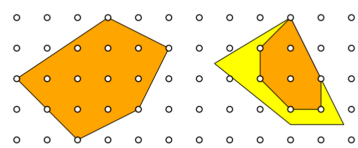
整凸多面体である　　整凸多面体ではない

集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$

整凸包とは？

S の**整凸包**とは，$\mathrm{conv}(S \cap \mathbb{Z}^n)$ のこと

オレンジの集合が黄色の集合の整凸包

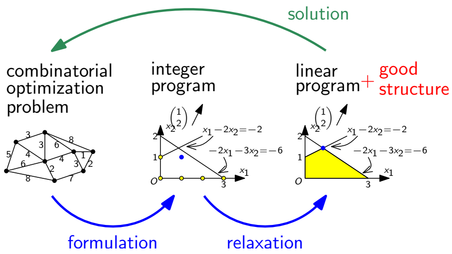


事実

有界な集合の整凸包は整凸多面体

目次

この講義のねらい：流れ



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察 ←今日もココ
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決

整数計画問題の線形計画緩和 (第 1 回講義スライドより)

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数， $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

(DLP) + 整数制約：(D)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \ge 0 \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{array}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le b \end{array}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \ge 0 \end{array}$$

観察

(P) の最適値 $\le$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\le$ (D) の最適値

整数計画問題の線形計画緩和 (第 1 回講義スライドより)

観察 (再掲)

(P) の最適値 $\le$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\le$ (D) の最適値

すなわち

(P) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\Rightarrow$

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

帰結：
- (P) は整数計画問題 (多項式時間解法が知られていない)
- (LP) は線形計画問題 (多項式時間解法が知られている)
- (P) の最適値 $=$ (D) の最適値であるとすると…
  - (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値
  - すなわち，(LP) を解けば，(P) の最適値が分かる！
  - すなわち，(P) が多項式時間で解ける !?

最後のステップは慎重な議論が必要

整数計画問題の線形計画緩和と整凸多面体

観察

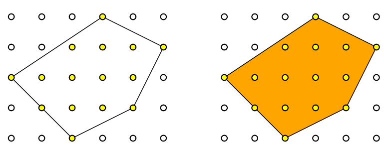
(P) の許容領域 $=$ (LP) の許容領域 $\Rightarrow$ (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値

(P) の許容領域は整数点の集合なので，この仮定は成り立たなさそう

事実 (証明は省略)

conv((P) の許容領域) $=$ (LP) の許容領域

$\Rightarrow$ (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値



整数計画問題の線形計画緩和と整凸多面体

事実 (再掲) (証明は省略)

conv((P) の許容領域) $=$ (LP) の許容領域

$\Rightarrow$ (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値

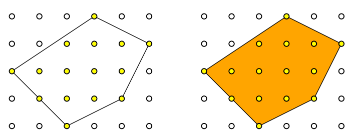
conv((P) の許容領域) $=$ (LP) の許容領域の整凸包なので

$\boxed{\text{conv((P) の許容領域)} = \text{(LP) の許容領域である}}$

$\Updownarrow$

$\boxed{\text{(LP) の許容領域が整凸多面体である}}$

$\rightsquigarrow$ (LP) の許容領域が整凸多面体となるときが重要に思える



目次

今日の目標

今日の目標

凸多面体と不等式系の関係を理解する
- 重要概念：ファセット定義不等式

凸多面体の整数性を理解し，組合せ最適化における重要性を説明できる
- 重要概念：整凸多面体
- 重要概念：整凸包