離散最適化基礎論 第 3 回
凸多面体の基礎

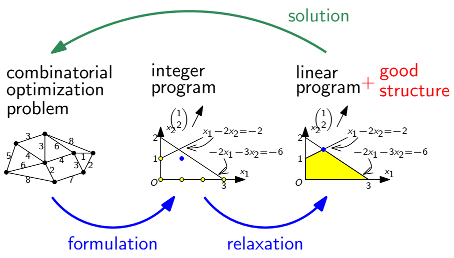
岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 10 月 24 日

最終更新：2014 年 11 月 2 日　08:41

この講義のねらい：流れ



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和
- 線形計画問題の「よい」構造を観察 ←今日はココ
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決

この講義のねらい

解きやすい問題	解きにくい問題
多項式時間解法が存在する	NP 困難性が証明されている

疑問
どうしてそのような違いが生まれるのか？

⇝ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

部分的な回答
問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

多面体 ＝ 線形計画問題の許容領域

今回と次回の内容：次の疑問に答える
「多面体」とは何か？ 「多面体構造」とは何か？

今日の目標

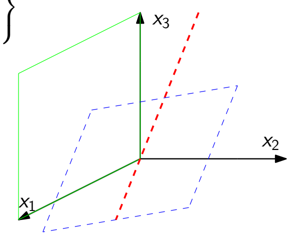
今日の目標
凸多面体の基礎を理解し，凸多面体の構造が記述できるようになる
- 重要概念：凸多面体の V 表現 (凸結合による)
- 重要概念：凸多面体の H 表現 (不等式系による)
- 重要概念：凸多面体の面

目次

復習：線形部分空間

線形部分空間とは？
$\mathbb{R}^n$ の線形部分空間とは，
ある行列 $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ を用いて $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ と書ける集合のこと

例：$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

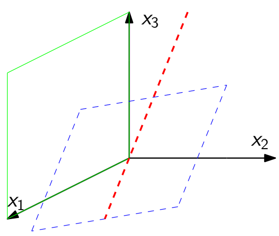


これは原点と $(-1, 0, 2)^\top$ を通る直線

復習：線形部分空間の次元

線形部分空間の次元とは？
線形部分空間 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ の次元は，$n - \mathrm{rank}(A)$ のこと

$\mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$



∴ この線形部分空間の次元 $= 3 - 2 = 1$

復習：線形結合

線形結合とは？
k 個の点 $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^n$ の線形結合とは，
ある実数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$$

と書ける点のこと

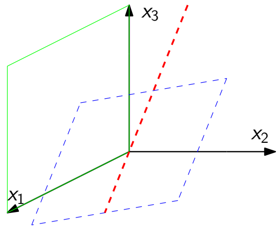
復習：線形包

線形包とは？

k 個の点 $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^n$ の**線形包**とは，
$p_1, p_2, \ldots, p_k$ の線形結合全体から成る集合

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}$$

例：$p_1 = (-1, 0, 2)^\top$



これは $(-1, 0, 2)^\top$ の線形包

復習：線形部分空間の記述

事実：線形部分空間 ＝ 線形包

1. 任意の $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ に対して，ある $p_1, p_2, \ldots, p_{n-k} \in \mathbb{R}^n$ が存在して，

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i p_i \,\middle|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R} \right\}$$

2. 任意の $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^n$ に対して，ある $A \in \mathbb{R}^{(n-k) \times n}$ が存在して，

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i \,\middle|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}$$

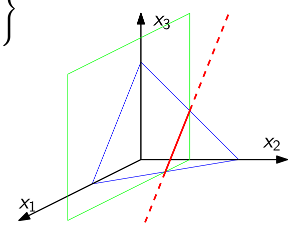
これは線形代数における基礎的な事実

アフィン部分空間

アフィン部分空間とは？

$\mathbb{R}^n$ の**アフィン部分空間**とは，ある行列 $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ とベクトル $b \in \mathbb{R}^k$ を用いて $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ と書ける集合のこと

例：$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$



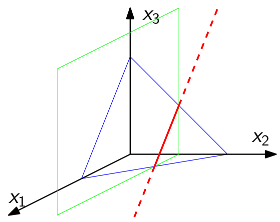
これは $(1/2, 1, 0)^\top$ と $(0, 1, 1)^\top$ を通る直線

アフィン部分空間の次元

アフィン部分空間の次元とは？

アフィン部分空間 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ の**次元**は，$n - \mathrm{rank}(A)$ のこと

$\mathrm{rank}(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}) = 2$



$\therefore$ このアフィン部分空間の次元 $= 3 - 2 = 1$

アフィン結合

アフィン結合とは？

k 個の点 $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^n$ の**アフィン結合**とは，
$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ を満たすある実数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$$

と書ける点のこと

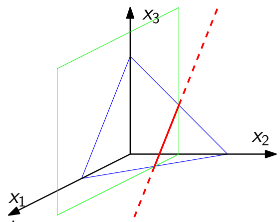
アフィン包

アフィン包とは？

k 個の点 $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^n$ の**アフィン包**とは，
$p_1, p_2, \ldots, p_k$ のアフィン結合全体から成る集合

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

$p_1 = (1/2, 1, 0)^\top, p_2 = (0, 1, 1)^\top$



これは $(1/2, 1, 0)^\top$ と $(0, 1, 1)^\top$ のアフィン包

アフィン部分空間の記述

命題：アフィン部分空間 ＝ アフィン包

1. 任意の $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ と $b \in \mathbb{R}^k$ に対して，
ある $p_1, p_2, \ldots, p_{n-k+1} \in \mathbb{R}^n$ が存在して，

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n-k+1} \lambda_i p_i \,\middle|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k+1} \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n-k+1} \lambda_i = 1 \right\}$$

2. 任意の $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^n$ に対して，
ある $A \in \mathbb{R}^{(n-k+1) \times n}$ と $b \in \mathbb{R}^k$ が存在して，

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i \,\middle|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

超平面

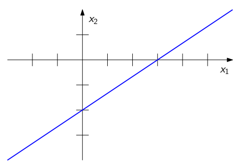
超平面 (hyperplane) とは？

$\mathbb{R}^n$ における**超平面**とは，$n-1$ 次元アフィン部分空間

つまり，あるベクトル $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ と実数 $b \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x = b\}$$

と書ける集合のこと



$n = 2$ のときの例：$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - 3x_2 = 6\}$

閉半空間

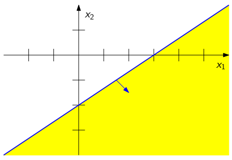
閉半空間 (closed halfspace) とは？

$\mathbb{R}^n$ における閉半空間とは，
あるベクトル $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ と実数 $b \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x \le b\}$$

と書ける集合のこと

$n = 2$ のときの例：$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - 3x_2 \le 6\}$



閉半空間の境界は超平面

目次

凸結合

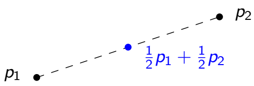
k 個の点 $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^n$

凸結合とは？

$p_1, p_2, \ldots, p_k$ の凸結合とは，
$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ を満たすある 非負 実数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i$$

と書ける点のこと



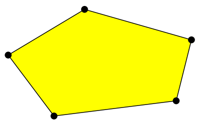
凸包

凸包とは？

k 個の点 $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^n$ の凸包とは，
$p_1, p_2, \ldots, p_k$ の凸結合全体から成る集合

$$\left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}, \\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \ge 0, \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

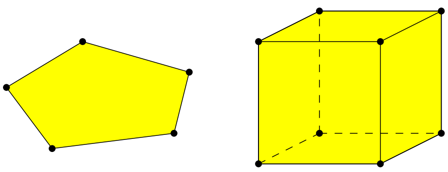
集合 S の凸包を $\mathrm{conv}(S)$ で表す



V 多面体 (凸包による凸多面体の定義)

V 多面体とは？

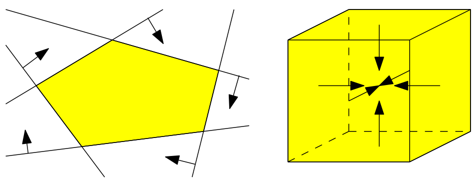
V 多面体とは有限個の点の凸包のこと



H 多面体 (不等式系による凸多面体の定義)

H 多面体とは？

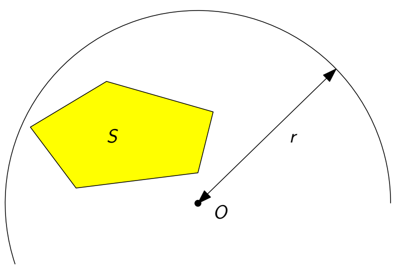
H 多面体とは有限個の閉半空間の共通部分で有界なもののこと



有界性

有界であるとは？

集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が有界であるとは，ある実数 $r \in \mathbb{R}$ が存在して
任意の $x \in S$ に対して $\|x\| \le r$ となること

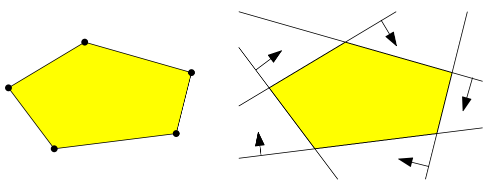


凸多面体の基本定理：Minkowski–Weyl の定理

事実：Minkowski–Weyl の定理 (証明はしない)

- V 多面体は H 多面体である
- H 多面体は V 多面体である

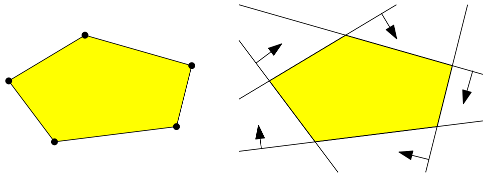
この同値性をもって，
凸多面体とは，V 多面体，あるいは，H 多面体のこと



凸多面体の表現

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

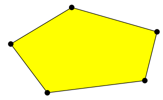
- P を有限個の点の凸包として記述したものを P の V 表現と呼ぶ
- P を有限個の閉半空間の共通部分として記述したものを P の H 表現と呼ぶ



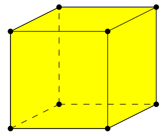
凸多面体の次元

凸多面体の次元とは？

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ の次元とは，P を含むアフィン部分空間の次元の最小値



$\dim(P) = 2$

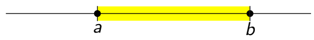


$\dim(P) = 3$

目次

閉区間

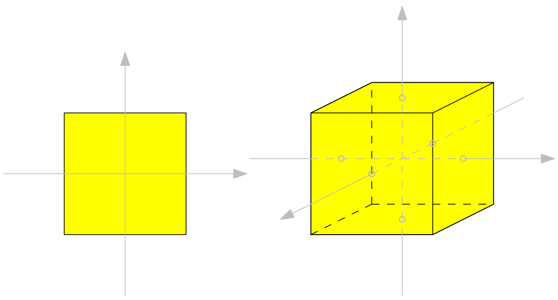
閉区間 $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ は凸多面体 (ただし，$a \leq b$)



- V 表現：$I = \mathrm{conv}(\{a, b\})$
- H 表現：$I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a, x \leq b\}$
- $\dim(I) = \begin{cases} 1 & (a < b \text{ のとき}) \\ 0 & (a = b \text{ のとき}) \end{cases}$

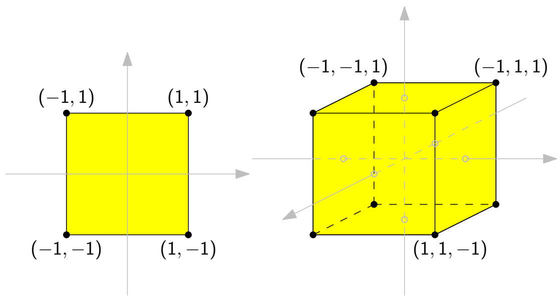
立方体

n 次元立方体 C_n とは $[-1, 1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ のこと



立方体：V 表現

n 次元立方体 C_n とは $[-1, 1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ のこと

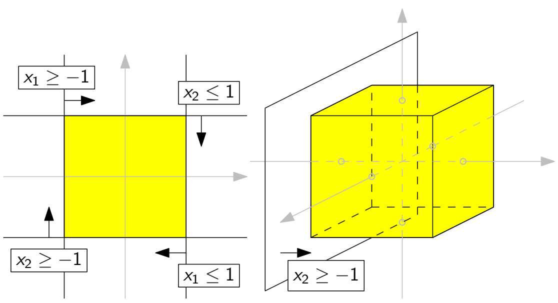


V 表現：

$$C_n = \mathrm{conv}(\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \{-1, 1\} \text{ for all } i \in \{1, \dots, n\}\})$$

立方体：H 表現

n 次元立方体 C_n とは $[-1, 1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ のこと

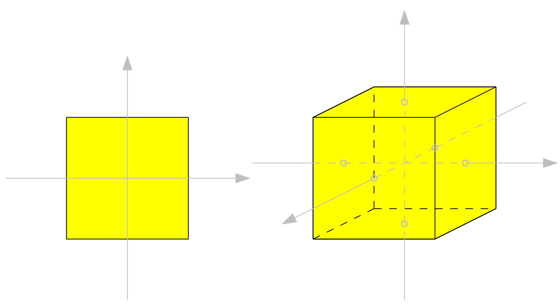


H 表現：

$$C_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq x_i \leq 1 \text{ for all } i \in \{1, \dots, n\}\}$$

立方体：次元

n 次元立方体 C_n とは $[-1, 1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ のこと

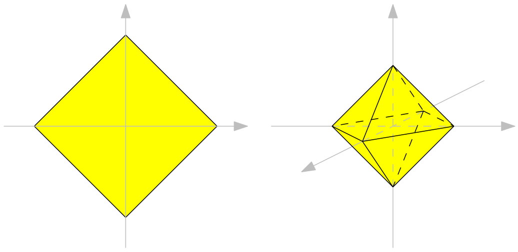


次元：

$$\dim(C_n) = n$$

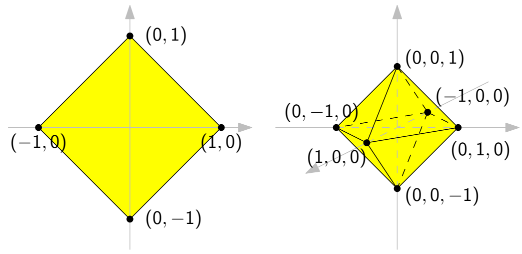
十字多面体

n 次元十字多面体 C_n^* とは $\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le 1\right\}$



十字多面体：V 表現

n 次元十字多面体 C_n^* とは $\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le 1\right\}$

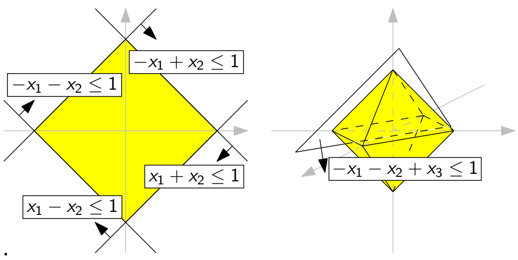


V 表現：e_i を第 i 標準基底ベクトルとして

$$C_n^* = \mathrm{conv}(\{e_i \mid i \in \{1,\ldots,n\}\} \cup \{-e_i \mid i \in \{1,\ldots,n\}\})$$

十字多面体：H 表現

n 次元十字多面体 C_n^* とは $\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le 1\right\}$

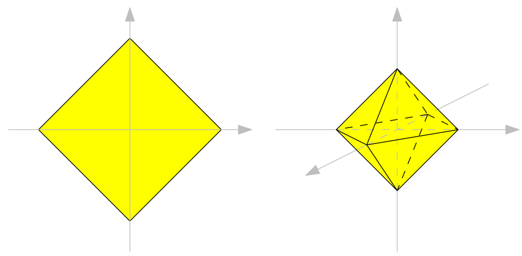


H 表現：

$$C_n^* = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} s_i x_i \le 1, s_i \in \{-1,1\} \text{ for all } i \in \{1,\ldots,n\}\right\}$$

十字多面体：次元

n 次元十字多面体 C_n^* とは $\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le 1\right\}$



次元：

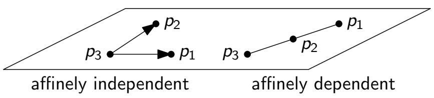
$$\dim(C_n^*) = n$$

アフィン独立性

単体を定義するために，まずアフィン独立性を定義する

アフィン独立性とは？

点集合 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ がアフィン独立であるとは，
ベクトル $p_1 - p_k, p_2 - p_k, \ldots, p_{k-1} - p_k$ が線形独立であること



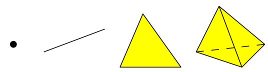
性質 (線形代数に関する演習問題)

$P \subseteq \mathbb{R}^n$ がアフィン独立 $\Rightarrow |P| \le n+1$

単体

単体

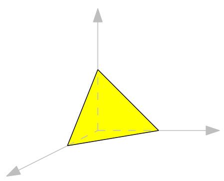
n 次元単体とは，$n+1$ 個のアフィン独立な点の集合の凸包



単体：標準的な構成法

n 次元標準単体

$$\Delta_n = \mathrm{conv}(\{e_i \in \mathbb{R}^{n+1} \mid i \in \{1,\ldots,n+1\}\})$$



補足：Δ_n は $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合だが，$\dim(\Delta_n) = n$

目次

妥当不等式

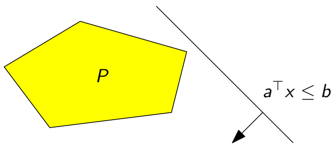
凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

妥当不等式とは？

P に対する妥当不等式とは，$a \in \mathbb{R}^n$ と $b \in \mathbb{R}$ を用いた不等式 $a^\top x \leq b$ で，

$$\text{任意の } z \in P \text{ に対して，} \quad a^\top z \leq b$$

を満たすもののこと



半空間 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x \leq b\}$ が P を含む

凸多面体の面

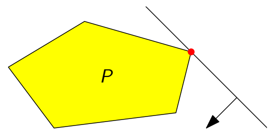
凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

凸多面体の面とは？

P の面とは，P に対する妥当不等式 $a^\top x \leq b$ を用いて

$$P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x = b\}$$

と書ける集合のこと



特殊な面

任意の凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

- P は P の面
  - $a = 0$, $b = 0$ とすると，$\{x \mid a^\top x = b\} = \mathbb{R}^d$ なので，
  $$P \cap \{x \mid a \cdot x = b\} = P \cap \mathbb{R}^d = P$$
- $\emptyset$ は P の面
  - $a = 0$, $b = 1$ とすると，$\{x \mid a^\top x = b\} = \emptyset$ なので，
  $$P \cap \{x \mid a \cdot x = b\} = P \cap \emptyset = \emptyset$$

凸多面体の面は凸多面体

命題

凸多面体の面は凸多面体

証明：任意の凸多面体 P の任意の面 $F \subseteq P$ を考える

- $F = P \cap \{x \mid a^\top x = b\}$ とすると
  $F = P \cap \{x \mid a^\top x \leq b\} \cap \{x \mid a^\top x \geq b\}$
- P は凸多面体なので，有限個の閉半空間の共通部分
- $\therefore$ F も有限個の閉半空間の共通部分
- $\therefore$ F は凸多面体 □

凸多面体の頂点とファセット

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$

凸多面体の頂点とは？

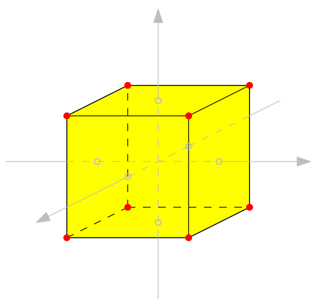
P の頂点とは，P の面で次元が 0 のもの

凸多面体のファセットとは？

P のファセットとは，P の面で次元が $\dim(P) - 1$ のもの

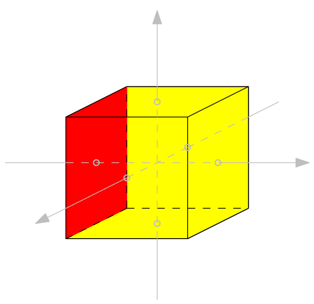
例：頂点

3 次元立方体に，頂点は 8 個ある



Example: Facets

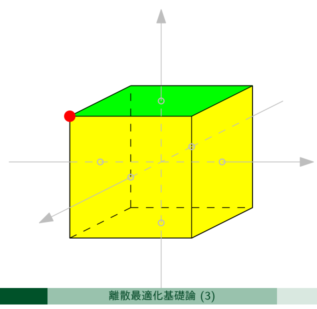
3 次元立方体に，ファセットは 6 個ある



凸多面体の面の面は凸多面体の面

事実 (証明は省略)

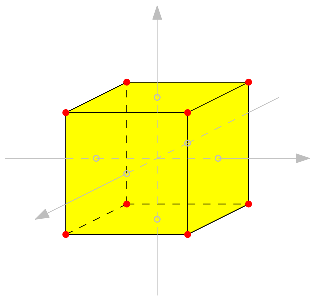
$$\left.\begin{array}{l} P : \text{凸多面体} \\ F \subseteq P : P \text{ の面} \\ F' \subseteq F : F \text{ の面} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad F' : P \text{ の面}$$



凸多面体はその頂点集合の凸包

事実 (証明は省略)

$$\left.\begin{array}{l} P\text{：凸多面体} \\ V\text{：}P\text{ の頂点全体の集合} \end{array}\right\} \Rightarrow P = \mathrm{conv}(V)$$



目次

今日の目標

今日の目標

凸多面体の基礎を理解し，凸多面体の構造が記述できるようになる

- 重要概念：凸多面体の V 表現 (凸結合による)
- 重要概念：凸多面体の H 表現 (不等式系による)
- 重要概念：凸多面体の面

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK