離散最適化基礎論 第 2 回
組合せ最適化問題と整数計画問題

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 10 月 10 日

最終更新：2014 年 10 月 26 日　08:56

今日の目標

今日の目標

組合せ最適化問題を 01 整数計画問題として定式化できるようになる

- 例：最大重みマッチング問題
- 例：最小費用全域木問題

注意

同じ組合せ最適化問題を様々な方法で定式化できる
⇝「よい定式化」と「悪い定式化」がある　(次回以降)

目次

01 整数計画問題

01 整数計画問題 (01 integer program) とは次のような数理計画問題

例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 6, -x_1 + 2x_2 \le 2, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ & x_1, x_2 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

一般的な書き方

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \le b, \\ & x \in \{0,1\}^n \end{aligned}$$

01 整数計画問題：図を描いて解く

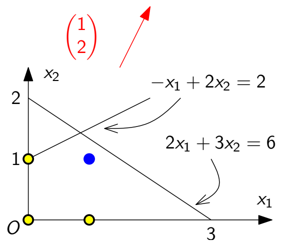
01 整数計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ & -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ & x_1, x_2 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

図を描いてみる
そして解いてみる：

- $x_1 = 1, x_2 = 1$ は最適解
- 最適値は 3



01 整数計画問題と整数計画問題

01 整数計画問題

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \le b, \\ & x \in \{0,1\}^n \end{aligned}$$

これは，次の整数計画問題と同じ

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \le b, x \ge 0, x \le 1, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

つまり，01 整数計画問題は整数計画問題の特別な場合

01 整数計画問題に関する実践

事実

01 整数計画問題を多項式時間で解くアルゴリズムは知られていない

- 実際，NP 困難な問題であると知られている
  (NP 困難性の詳細は，講義『計算理論』を参照)
- しかし，通常の整数計画問題より特殊なので，
  その特殊性を活かしたアルゴリズムが開発されてきている

事実

01 整数計画問題として多くの問題がモデル化できる

- 線形計画問題よりも多くの問題がモデル化できる
- 多くの組合せ最適化問題もモデル化できる

目次

組合せ最適化問題とは？

組合せ最適化問題とは？

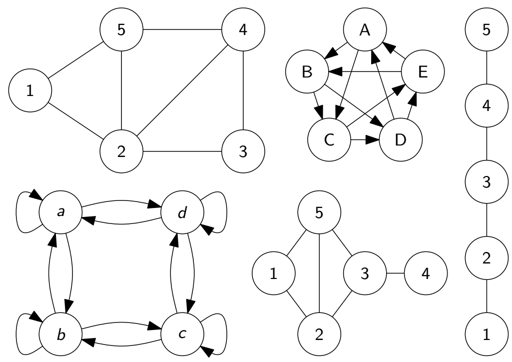
与えられた (有限) 集合の要素の中で
- 与えらえた条件 (制約) を満たし，
- 与えらえた目的 (関数) を最大化 (あるいは最小化) する

ものを見つける問題

「与えられた有限集合」の典型例
- グラフの頂点集合の冪集合　(見つけるものは頂点部分集合)
- グラフの辺集合の冪集合　(見つけるものは辺部分集合)
- 文字列の集合　(見つけるものは文字列)
- 順列の集合　(見つけるものは順列)
- $\cdots$

この講義では，グラフに関わる組合せ最適化問題を主に扱う

グラフの例



有向グラフ

有向グラフとは？

有向グラフとは，順序対 (V, A) で，
- V は集合
- $A \subseteq V \times V$ は V の順序対の集合

であるもののこと

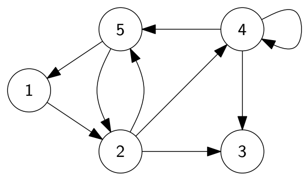
例：
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$

注意

$(2, 5) \neq (5, 2)$　(順序対では順序が大事)

有向グラフの図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$



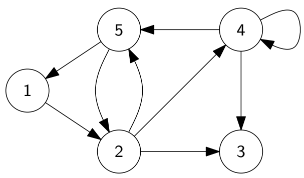
有向グラフの用語

有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフの用語

- V の要素を G の頂点と呼ぶ
- A の要素を G の弧と呼ぶ
- V を G の頂点集合と呼ぶ
- A を G の弧集合と呼ぶ
- 弧 $(u, v) \in A$ に対して，u はその始点であり，v はその終点である

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$
- 頂点 2 は弧 $(2, 3)$ の始点，頂点 3 は弧 $(2, 3)$ の終点



無向グラフ

無向グラフとは？

無向グラフとは，順序対 (V, E) で，
- V は集合
- $E \subseteq 2^V$ は V の 要素数 2 の部分集合の集合

であるもののこと

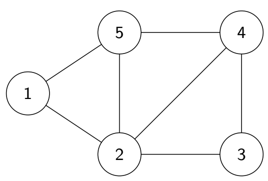
例：
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

注意

$\{2, 5\} = \{5, 2\}$　(集合では順序を不問)

無向グラフの図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



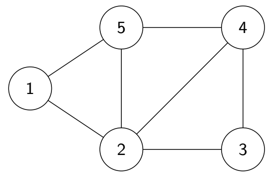
無向グラフの用語

無向グラフ $G = (V, E)$

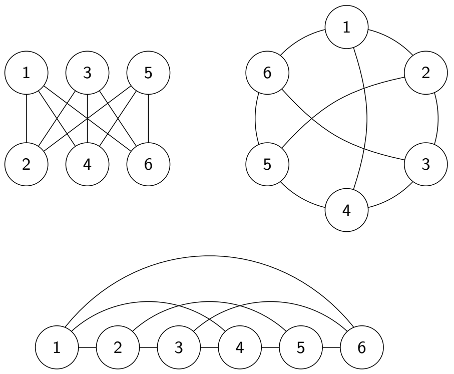
無向グラフの用語

- V の要素を G の頂点と呼ぶ
- E の要素を G の辺と呼ぶ
- V を G の頂点集合と呼ぶ
- E を G の辺集合と呼ぶ
- 辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，u, v をその端点と呼ぶ
- 頂点 v が辺 e の端点であるとき，v は e に接続するという
- 頂点 u と v が辺を成すとき，u と v は隣接するという

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$
- 頂点 2, 3 は辺 $\{2, 3\}$ の端点
- 頂点 2 は辺 $\{2, 3\}$ に接続する
- 頂点 2 と頂点 3 は隣接する



1 つのグラフに対するいろいろな図示



用語に関する注意

有向グラフ
- 「頂点」の別名：「節点」,「ノード」,「点」
- 「弧」の別名：「辺」,「有向辺」,「アーク」,「エッジ」

無向グラフ
- 「頂点」の別名：「節点」,「ノード」,「点」
- 「辺」の別名：「無向辺」,「エッジ」

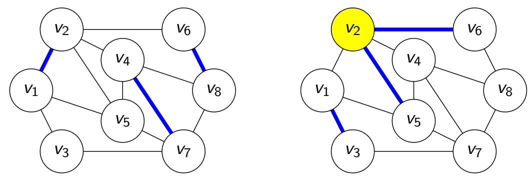
目次

グラフにおけるマッチング

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングとは？

G の**マッチング**とは辺部分集合 $M \subseteq E$ で，
M のどの 2 辺も同じ頂点に接続しないもの

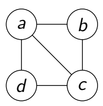


$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ は マッチングである

$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ は マッチングではない

マッチングの辺 $e \in M$ は e の端点を**飽和**する

グラフにおけるすべてのマッチング



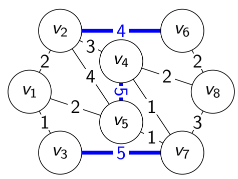
このグラフのマッチングは以下のもの
- $\emptyset$
- $\{\{a, b\}\}$
- $\{\{a, c\}\}$
- $\{\{a, d\}\}$
- $\{\{b, c\}\}$
- $\{\{c, d\}\}$
- $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

最大重みマッチング

無向グラフ $G = (V, E)$
各辺 $e \in E$ に対する非負重み $w(e) \geq 0$ (辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$)

最大重みマッチングとは？

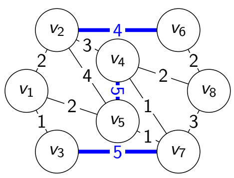
w に関する G の**最大重みマッチング**とは
G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意のマッチング M' に対して $\sum_{e \in M} w(e) \geq \sum_{e \in M'} w(e)$ を満たすもの



以後，$w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$ と書く

最大重みマッチング問題

最大重みマッチング問題とは？
- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$
- 出力：G のマッチングで，重みが最大のもの



事実

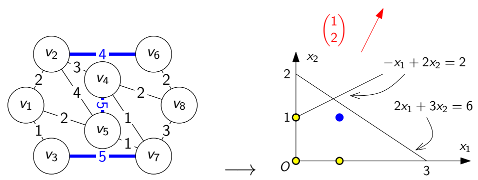
最大重みマッチング問題は効率よく解くことができる (Edmonds, '65)

効率よく $=$ $|V|$ と $|E|$ に関する多項式時間で

今から行うこと

目標

最大重みマッチング問題を 01 整数計画問題として定式化する
(モデル化する)



最適化モデル作成のポイント

最適化モデル作成のポイント：基礎

次を明確にする

- 変数は何か？ 何を変数は表すのか？
- 目的関数は何か？ 何を最適化するのか？
- 制約は何か？ 何を制約は表すのか？

最適化モデル作成のポイント：基礎の次

次を心がける

- 「非線形よりも線形」を目指す
- 「整数計画よりも 01 整数計画」を目指す
- 「big-M は使わない」を目指す

最大重みマッチング問題：変数

決定すべきこと：どの辺を選ぶか (選択)

- 各辺 $e \in E$ に対して
$$x_e \in \{0,1\}$$
という変数を設定する
- 解釈：
$$\begin{cases} x_e = 0 & \Leftrightarrow \quad \text{辺 } e \text{ を選ばない} \\ x_e = 1 & \Leftrightarrow \quad \text{辺 } e \text{ を選ぶ} \end{cases}$$
- 変数の数 $= |E|$ (辺の数)

ポイント

01 変数で「選択」を表現する

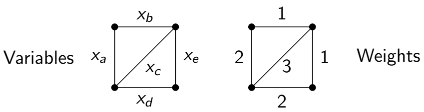
最大重みマッチング問題：目的関数

最大化するもの：マッチングの要素である辺の重み和

- 目的は
$$\text{maximize} \quad \sum_{e \in E} w(e) x_e$$

考え方

- 辺 $e \in E$ を選ぶと，重み $w(e)$ が加えられる
- 目的関数 = 選ばれた辺の重みの和



$x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \in \mathbb{R}$ を変数として，目的関数は
$$2x_a + x_b + 3x_c + 2x_d + x_e$$

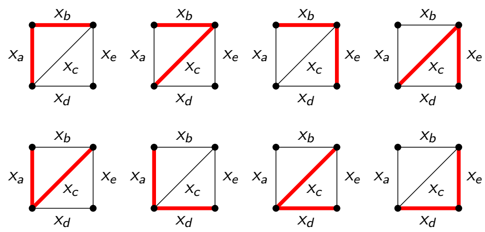
最大重みマッチング問題：制約

制約：選ばれた辺全体がマッチングになる

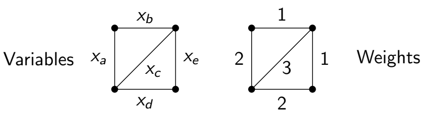
- 同じ頂点に接続するすべての 2 辺 $e, f \in E$ に対して
$$x_e + x_f \le 1$$

考え方

- $M \subseteq E$ がマッチング $\Leftrightarrow$ M のどの 2 辺も同じ頂点に接続しない



最大重みマッチング問題：定式化の例



$x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 2x_a + x_b + 3x_c + 2x_d + x_e \\ \text{subject to} & x_a + x_b \le 1, \\ & x_a + x_c \le 1, x_a + x_d \le 1, x_c + x_d \le 1, \\ & x_b + x_e \le 1, \\ & x_b + x_c \le 1, x_c + x_e \le 1, x_b + x_e \le 1, \\ & x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \in \{0,1\} \end{array}$$

最大重みマッチング問題：定式化 1

最大重みマッチング問題：01 整数計画問題としての定式化 1

$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

$$\begin{array}{lll} \text{maximize} & \sum_{e \in E} w(e) x_e & \\ \text{subject to} & x_e + x_f \le 1 & (\forall\ e, f：\text{同じ頂点に接続する辺}), \\ & x_e \in \{0,1\} & (\forall\ e \in E) \end{array}$$

これは正しい定式化

最大重みマッチング問題：制約 (見直し)

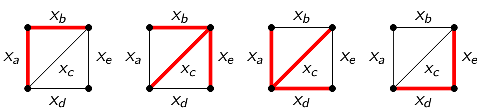
制約：選ばれた辺全体がマッチングになる

- すべての頂点 $v \in V$ に対して
$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e \le 1$$

記法：$\delta(v) = v$ に接続する辺全体の集合

考え方

- $M \subseteq E$ がマッチング $\Leftrightarrow$ M のどの 2 辺も同じ頂点に接続しない
  $\Leftrightarrow$ どの頂点 v に対しても，
  それに接続する M の辺は 1 個以下
- 解釈：v に接続する辺は高々1 つしか選ばれない



最大重みマッチング問題：定式化 2

最大重みマッチング問題：01 整数計画問題としての定式化 2

$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

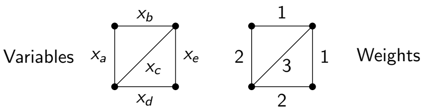
$$\begin{array}{lll} \text{maximize} & \sum_{e \in E} w(e) x_e & \\ \text{subject to} & \sum_{e \in \delta(v)} x_e \le 1 & (\forall\ v \in V), \\ & x_e \in \{0,1\} & (\forall\ e \in E) \end{array}$$

これも正しい定式化

注意

同じ組合せ最適化問題を様々な方法で定式化できる
$\rightsquigarrow$ 「よい定式化」と「悪い定式化」がある (次回以降)

最大重みマッチング問題：定式化 2 の例



$x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & 2x_a + x_b + 3x_c + 2x_d + x_e \\ \text{subject to} & x_a + x_b \le 1, \\ & x_a + x_c + x_d \le 1, \\ & x_b + x_e \le 1, \\ & x_b + x_c + x_e \le 1, \\ & x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \in \{0, 1\} \end{array}$$

目次

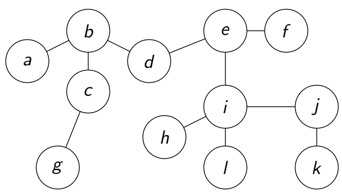
木

無向グラフ $G = (V, E)$

木とは？

G が木であるとは，次の 2 つの条件を満たすこと

- G は連結である
- G は閉路を部分グラフとして含まない



「連結である」ことの定義は次のスライドで

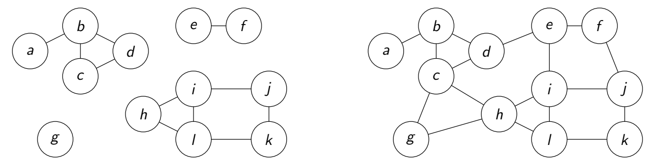
グラフの連結性

無向グラフ $G = (V, E)$

グラフが連結であるとは？

G が連結であるとは，
任意の 2 頂点 $u, v \in V$ に対して，u から v へ至る道が存在すること

連結ではないグラフは非連結と呼ばれる



非連結グラフ　　連結グラフ

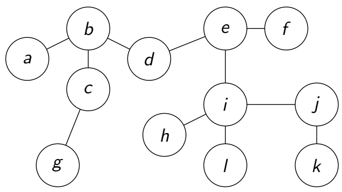
注：「グラフが連結する」とは言わない

木の辺数

木の辺数

任意の木 $G = (V, E)$ に対して

$$|E| = |V| - 1$$



$|V| = 12, |E| = 11$

証明は『数理解析』又は『グラフとネットワーク』を参照

グラフの全域木

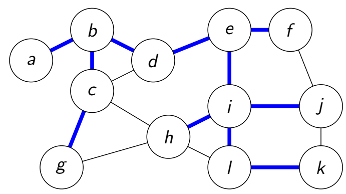
無向グラフ $G = (V, E)$

全域木とは？

G の全域木とは，G の部分グラフで次を満たすもの

- 木である
- 頂点集合が V である

- 全張木，生成木とも呼ぶことがある

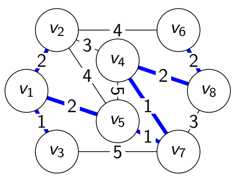


G が非連結であるとき，G の全域木は存在しない

最小費用全域木問題

最小費用全域木問題とは？

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺費用関数 $c: E \to \mathbb{R}$
- 出力：G の全域木で，費用が最小のもの



事実

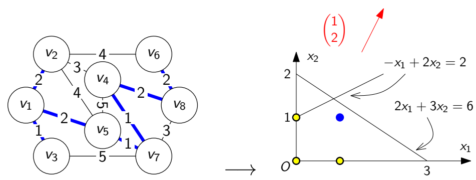
最小費用全域木問題は効率よく解くことができる (Kruskal '56, Prim '57)

効率よく ＝ $|V|$ と $|E|$ に関する多項式時間で

今から行うこと

目標

最小費用全域木問題を 01 整数計画問題として定式化する
(モデル化する)



最適化モデル作成のポイント (再掲)

最適化モデル作成のポイント：基礎

次を明確にする

- 変数は何か？ 何を変数は表すのか？
- 目的関数は何か？ 何を最適化するのか？
- 制約は何か？ 何を制約は表すのか？

最適化モデル作成のポイント：基礎の次

次を心がける

- 「非線形よりも線形」を目指す
- 「整数計画よりも 01 整数計画」を目指す
- 「big-M は使わない」を目指す

最小費用全域木問題：変数

決定すべきこと：どの辺を選ぶか (選択)

- 各辺 $e \in E$ に対して
$$x_e \in \{0, 1\}$$
という変数を設定する
- 解釈：
$$\begin{cases} x_e = 0 & \Leftrightarrow \quad \text{辺 } e \text{ を選ばない} \\ x_e = 1 & \Leftrightarrow \quad \text{辺 } e \text{ を選ぶ} \end{cases}$$
- 変数の数 $= |E|$ (辺の数)

最小費用全域木問題：目的関数

最小化するもの：全域木の要素である辺の費用和

- 目的は
$$\text{minimize} \quad \sum_{e \in E} c(e) x_e$$

考え方

- 辺 $e \in E$ を選ぶと，費用 $c(e)$ が加えられる
- 目的関数 $=$ 選ばれた辺の費用の和

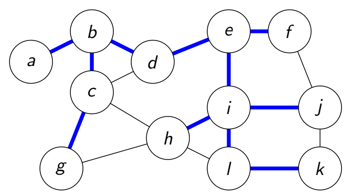
最小費用全域木問題：制約 — 予備的考察

定義の確認

$T \subseteq E$ が全域木の辺集合であるとは？

- T に閉路が存在しない
- T において，任意の 2 頂点間に道が存在する

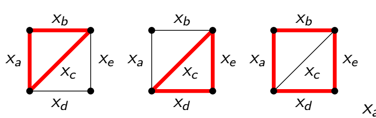
この 2 つを制約式として表現しないといけない



最小費用全域木問題：制約 (1)

制約：閉路が存在しないこと

G の任意の閉路 C に対して，
$$\sum_{e \in C} x_e \leq |C| - 1$$
注：閉路 C を G の辺部分集合とみなしている



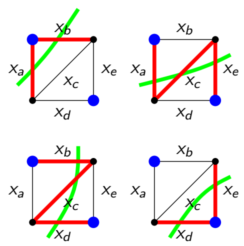
$$\begin{aligned} x_a + x_b + x_c &\leq 2, \\ x_c + x_d + x_e &\leq 2, \\ x_a + x_b + x_e + x_d &\leq 3 \end{aligned}$$

最小費用全域木問題：制約 (2) — 予備的考察

制約：頂点 $u, v \in V$ の間に道が存在すること

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 \qquad (\forall\ S \subseteq V : u \in S, v \notin S)$$

記法：$\delta(S) =$ S に一方の端点，$V - S$ にもう一方の端点を持つ辺全体の集合



左上の頂点と右下の頂点の間に道が存在すること

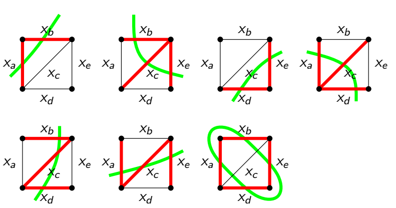
$$\begin{aligned} x_a + x_b &\geq 1, \\ x_a + x_c + x_e &\geq 1, \\ x_b + x_c + x_d &\geq 1, \\ x_d + x_e &\geq 1 \end{aligned}$$

最小費用全域木問題：制約 (2)

制約：任意の 2 頂点間に道が存在すること

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 \qquad (\forall\ S \subseteq V : S \neq \emptyset, S \neq V)$$

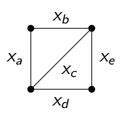
記法：$\delta(S) =$ S に一方の端点，$V - S$ にもう一方の端点を持つ辺全体の集合

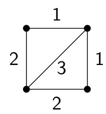


$$\begin{aligned} x_a + x_b &\geq 1, \\ x_b + x_c + x_e &\geq 1, \\ x_d + x_e &\geq 1, \\ x_a + x_c + x_d &\geq 1, \\ x_b + x_c + x_d &\geq 1, \\ x_a + x_c + x_e &\geq 1, \\ x_a + x_b + x_d + x_e &\geq 1 \end{aligned}$$

最小費用全域木問題：定式化の例

Variables





Costs

$x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 2x_a + x_b + 3x_c + 2x_d + x_e \\ \text{subject to} \quad & x_a + x_b + x_c \leq 2, x_c + x_d + x_e \leq 2, x_a + x_b + x_e + x_d \leq 3, \\ & x_a + x_b \geq 1, x_b + x_c + x_e \geq 1, x_d + x_e \geq 1, x_a + x_c + x_d \geq 1, \\ & x_b + x_c + x_d \geq 1, x_a + x_c + x_e \geq 1, x_a + x_b + x_d + x_e \geq 1, \\ & x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

最小費用全域木問題：定式化 1

最小費用全域木問題：01 整数計画問題としての定式化 1

$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{e \in E} c(e) x_e \\ \text{subject to} \quad & \sum_{e \in C} x_e \leq |C| - 1 \qquad (\forall\ C : G \text{ の閉路}), \\ & \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 \qquad (\forall\ S \subseteq V : S \neq \emptyset, S \neq V), \\ & x_e \in \{0, 1\} \qquad (\forall\ e \in E) \end{aligned}$$

これは正しい定式化

全域木の性質

木であるための必要十分条件

無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，次の 3 つは同値

1. G は閉路を含まない，かつ，G は連結である (つまり，G は木である)
2. G は閉路を含まない，かつ，$|E| = |V| - 1$ である
3. G は連結である，かつ，$|E| = |V| - 1$ である

- 定式化 1 は 1 に基づいている
- 定式化 2 は 2 に基づいて行う
- 定式化 3 は 3 に基づいて行う

証明は『数理解析』又は『グラフとネットワーク』を参照

最小費用全域木問題：定式化 2

最小費用全域木問題：01 整数計画問題としての定式化 2

$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{e \in E} c(e) x_e \\ \text{subject to} \quad & \sum_{e \in C} x_e \leq |C| - 1 \qquad (\forall\ C : G \text{ の閉路}), \\ & \sum_{e \in E} x_e = |V| - 1, \\ & x_e \in \{0, 1\} \qquad (\forall\ e \in E) \end{aligned}$$

これも正しい定式化

最小費用全域木問題：定式化 3

最小費用全域木問題：01 整数計画問題としての定式化 3

$x \in \mathbb{R}^E$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{e \in E} c(e) x_e \\ \text{subject to} \quad & \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 \qquad (\forall\ S \subseteq V : S \neq \emptyset, S \neq V), \\ & \sum_{e \in E} x_e = |V| - 1, \\ & x_e \in \{0, 1\} \qquad (\forall\ e \in E) \end{aligned}$$

これも正しい定式化

注意

同じ組合せ最適化問題を様々な方法で定式化できる

$\leadsto$ 「よい定式化」と「悪い定式化」がある (次回以降)

目次

今日の目標

今日の目標

組合せ最適化問題を 01 整数計画問題として定式化できるようになる

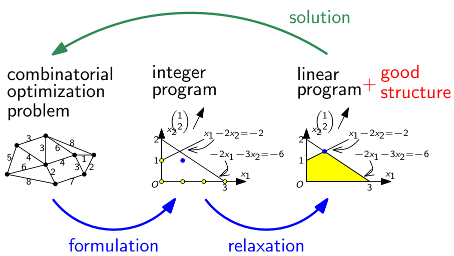
- 例：最大重みマッチング問題
- 例：最小費用全域木問題

注意

同じ組合せ最適化問題を様々な方法で定式化できる

$\leadsto$ 「よい定式化」と「悪い定式化」がある (次回以降)

この講義のねらい：流れ



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化 (今回)
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和 (前回)
- 線形計画問題の「よい」構造を観察 (次回以降)
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決 (次回以降)

この講義のねらい

解きやすい問題	解きにくい問題
多項式時間解法が存在する	NP 困難性が証明されている

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\leadsto$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

部分的な回答

問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

多面体 $=$ 線形計画問題の許容領域

次回と次々回の内容：次の疑問に答える

「多面体」とは何か？ 「多面体構造」とは何か？

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK