离散最適化基礎論 第 1 回
線形計画問題と整数計画問題

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 10 月 3 日

最終更新：2014 年 10 月 10 日　10:57

概要

目標

離散最適化のトピックの 1 つとして
組合せ最適化における線形計画法の利用を取り上げ

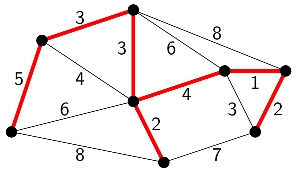
- 離散最適化と連続最適化の関係を理解する
- 幾何学的視点の重要性を理解する
- キーワード：緩和，双対性，整数性

なぜ講義で取り扱う？

- 「組合せ最適化の神髄」だから

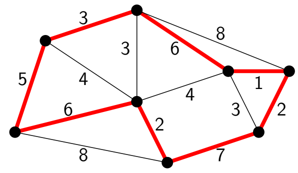
テーマ：組合せ最適化問題の解きやすさ

最小全域木問題：すべての頂点間に経路が存在するような
重み和最小のネットワークを作る



テーマ：組合せ最適化問題の解きやすさ

巡回セールスマン問題：すべての頂点をちょうど一度ずつ通るような
重み和最小の巡回路を作る



テーマ：組合せ最適化問題の解きやすさ

解きやすい問題

- 最小全域木問題
- 最大マッチング問題
- 最小カット問題
- ...

解きにくい問題

- 巡回セールスマン問題
- 最小頂点被覆問題
- 最小彩色問題
- ...

「解きやすい」とは

多項式時間解法が存在する

「解きにくい」とは

NP 困難性が証明されている

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

⇝ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

テーマ：解きやすい組合せ最適化問題が持つ「共通の性質」

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

⇝ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

回答

よく分かっていない

しかし，部分的な回答はある

部分的な回答

問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

ポイント

効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

スケジュール 前半 (予定)

1. 線形計画問題と整数計画問題 (10/3)
2. 組合せ最適化問題と整数計画問題 (10/10)
- ⋆ 休講 (国内出張) (10/17)
3. 凸多面体の基礎 (10/24)
4. 凸多面体の整数性 (10/31)
5. 双対性の幾何学 (11/7)
6. 完全双対整数性 (11/14)
- ⋆ 休講 (調布祭) (11/21)
7. 完全双対整数性の幾何学 (11/28)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 完全双対整数性：ネットワークフロー (12/5)
9. 完全双対整数性：全域木 (12/12)
10. 完全双対整数性：マッチング (12/19)
- ⋆ 冬季休業 (12/26, 1/2)
11. 整数性ギャップ：下界 (1/9)
- ⋆ 休講 (センター試験準備) (1/16)
12. 整数性ギャップ：上界 (1/23)
- ⋆ 休講 (海外出張) (1/30)
13. まとめ (または，最近のトピック) (2/6)
- ⋆ 期末試験 (2/13?)

注意：予定の変更もありうる

情報

教員
- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

講義資料
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2014/fdopt/
- 注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う
- 講義当日の昼 12 時までに，ここに置かれる
- Twitter (@okamoto7yoshio)：置かれたことを知らせる tweet

講義資料

http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2014/fdopt/
- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- 演習問題

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

授業の進め方

講義 (80 分)
- スライドと板書で進める
- スライドのコピーに重要事項のメモを取る

演習 (10 分)
- 演習問題に取り組む
- 不明な点は教員に質問する

退室 (0 分) ←重要
- コメント (授業の感想，質問など) を紙に書いて提出する (匿名可)
- コメントとそれに対する回答は (匿名で) 講義ページに掲載される

オフィスアワー：金曜 5 限 (岡本居室か CED)
- 質問など
- ただし，いないときもあるので注意

演習問題

演習問題の進め方
- 授業の最後 10 分は演習問題を解く時間
- 残った演習問題は復習・試験対策用
- 注意：「模範解答」のようなものは存在しない

演習問題の種類
- 復習問題：講義で取り上げた内容を反復
- 補足問題：講義で省略した内容を補足
- 追加問題：講義の内容に追加

解答の提出
- 演習問題の答案をレポートとして提出してもよい (すること推奨)
- レポートを提出するならば，期限内に提出しないといけない (再提出は原則期限なし)
- レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- レポートはコメントが付けられて，返却される

評価

期末試験のみによる
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 4 題は演習問題として提示されたものと同一である (ただし,「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 20 点満点，計 120 点満点
- 成績において，100 点以上は 100 点で打ち切り
- 時間：90 分 (おそらく)
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

教科書・参考書

教科書
- 指定しない

全般的な参考書
- B. コルテ，J. フィーゲン (著)，浅野孝夫，浅野泰仁，小野孝男，平田富夫 (訳),『組合せ最適化 第 2 版』，丸善出版，2012 年.
- W. J. Cook, W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank, A. Schrijver, *Combinatorial Optimization*, Wiley, 1997.
- A. Schrijver, *Combinatorial Optimization*, Springer, 2002.
- その他，研究論文

この講義の約束

- 私語はしない (ただし，演習時間の相談は積極的に OK)
- 携帯電話はマナーモードにする
- この講義と関係のないことを (主に電子機器で) しない
- 音を立てて睡眠しない

約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

目次

線形計画問題の例

線形計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ & -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & x_1 \ge 0, \\ & x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

読み方

- 「maximize」の後に書いてある関数を最大化する
- 「subject to」の後に書いてある式を満たす x_1, x_2 の中で

線形計画問題の例：図

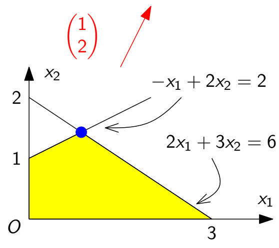
線形計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ & -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & x_1 \ge 0, \\ & x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

図を描いてみる
そして解いてみる：

- $x_1 = 6/7, x_2 = 10/7$ は最適解
- 最適値は $26/7$



線形計画問題の例：用語

線形計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ & -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & x_1 \ge 0, \\ & x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

- 目的関数 (objective function)：最大化したい関数
- 制約式 (制約) (constraint)：変数が満たさないといけない式
- 許容解 (feasible solution)：制約式をすべて満たす変数の値
- 許容領域 (feasible region)：許容解全体の集合

線形計画問題

線形計画問題 (linear program)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \le b \quad \leftarrow \text{成分ごとに「}\le\text{」} \end{aligned}$$

先ほどの例：

- $m = 4,\ n = 2$
- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

線形計画問題の例：行列とベクトルで書いてみる

線形計画問題の例

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ & -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & x_1 \ge 0, \\ & x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

行列とベクトルで書いてみる

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \text{subject to} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{許容領域} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array} \right\}$$

線形計画問題：別の表現

線形計画問題：別の表現

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b \quad \leftarrow \text{成分ごとに「}=\text{」} \\ & x \ge 0 \quad \leftarrow \text{成分ごとに「}\ge\text{」} \end{aligned}$$

制約は次の形であればよい

- 線形の等式
- 線形の (等号付き) 不等式

目的は次の形であればよい

- 線形関数の最大化
- 線形関数の最小化

最適解と最適値

線形計画問題 (P)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \le b \quad \leftarrow \text{成分ごとに「}\le\text{」} \end{aligned}$$

(P) の最適解と最適値とは？

(P) の許容解 $x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解 (optimal solution) であるとは

$$\text{(P) の任意の許容解 } x \in \mathbb{R}^n \text{ に対して，} \quad c^\top x^* \ge c^\top x$$

このとき，$c^\top x^*$ を (P) の最適値 (optimal value) と呼ぶ

注：「最適解」と「最適値」は明確に異なる概念

目次

線形計画問題の双対問題

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

線形計画問題：(P)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le b \end{array}$$

(P) の双対問題：(D)　　これも線形計画問題

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, \\ & y \ge 0 \end{array}$$

双対問題の「意味」は講義『数理計画法』を参照

線形計画問題の弱双対定理

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

主問題：(P)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le b \end{array}$$

双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, \\ & y \ge 0 \end{array}$$

弱双対定理

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解　$\Rightarrow c^\top x \le b^\top y$

弱双対定理：証明

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解であると仮定すると，

- $Ax \le b$ .... (1)

$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解であると仮定すると，

- $A^\top y = c$ かつ .... (2)
- $y \ge 0$ .... (3)

したがって，

$$c^\top x \overset{(2)}{=} (A^\top y)^\top x = (y^\top A)x = y^\top (Ax) \overset{(1),(3)}{\le} y^\top b = b^\top y \qquad \square$$

注意 (演習問題)

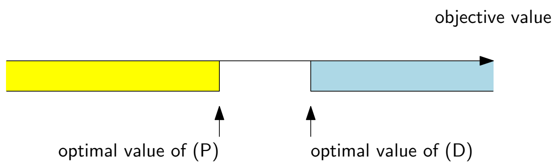
$s \in \mathbb{R}^k$ と $t \in \mathbb{R}^k$ に対して

$$s \le 0 \text{ かつ } t \ge 0 \quad \Rightarrow \quad s^\top t \le 0$$

線形計画問題の弱双対定理：イメージ

弱双対定理

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解　$\Rightarrow c^\top x \le b^\top y$



線形計画問題の弱双対定理：系

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

主問題：(P)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le b \end{array}$$

双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, \\ & y \ge 0 \end{array}$$

弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解　$\Rightarrow$　x^* は (P) の最適解
$c^\top x^* = b^\top y^*$　　y^* は (D) の最適解

系 (corollary)：定理から直ちに導かれる帰結

線形計画問題の弱双対定理：系 — 証明 (1)

弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解　$\Rightarrow$　x^* は (P) の最適解
$c^\top x^* = b^\top y^*$　　y^* は (D) の最適解

証明 (前半)：x^* と y^* が仮定を満たすとする

- (P) の任意の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ を考える
- このとき，$c^\top x^* \overset{\text{仮定}}{=} b^\top y^* \overset{\text{弱双対定理}}{\ge} c^\top x$
- したがって，x^* は (P) の最適解である

(P) の最適解とは？ (定義再掲)

(P) の許容解 $x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解であるとは

(P) の任意の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，　$c^\top x^* \ge c^\top x$

線形計画問題の弱双対定理：系 — 証明 (2)

弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解　$\Rightarrow$　x^* は (P) の最適解
$c^\top x^* = b^\top y^*$　　y^* は (D) の最適解

証明 (後半)：x^* と y^* が仮定を満たすとする

- (D) の任意の許容解 $y \in \mathbb{R}^n$ を考える
- このとき，$b^\top y^* \overset{\text{仮定}}{=} c^\top x^* \overset{\text{弱双対定理}}{\le} b^\top y$
- したがって，y^* は (D) の最適解である　$\square$

(D) の最適解とは？ (定義再掲)

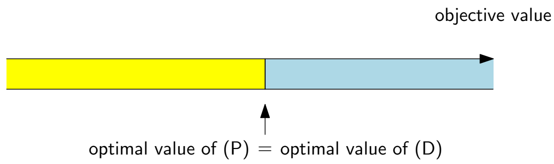
(D) の許容解 $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解であるとは

(D) の任意の許容解 $y \in \mathbb{R}^m$ に対して，　$b^\top y^* \le b^\top y$

線形計画問題の弱双対定理：系 — イメージ

弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解　$\Rightarrow$　x^* は (P) の最適解
$c^\top x^* = b^\top y^*$　　y^* は (D) の最適解



線形計画問題の強双対定理

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

主問題：(P)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le b \end{array}$$

双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, \\ & y \ge 0 \end{array}$$

強双対定理 (証明は省略)

$\begin{array}{l} x^* \in \mathbb{R}^n \text{ が (P) の最適解} \\ y^* \in \mathbb{R}^m \text{ が (D) の最適解} \end{array} \Rightarrow c^\top x^* = b^\top y^*$

線形計画問題の強双対定理：補足

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解，$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解 のとき

弱双対定理の系

$c^\top x^* = b^\top y^* \Rightarrow \begin{array}{l} x^* \in \mathbb{R}^n \text{ が (P) の最適解} \\ y^* \in \mathbb{R}^m \text{ が (D) の最適解} \end{array}$

つまり，目的関数値が一致するならば，それらは最適解

強双対定理

$\begin{array}{l} x^* \in \mathbb{R}^n \text{ が (P) の最適解} \\ y^* \in \mathbb{R}^m \text{ が (D) の最適解} \end{array} \Rightarrow c^\top x^* = b^\top y^*$

つまり，最適解ならば，目的関数値は一致する

線形計画問題に関する実践

事実

線形計画問題は多項式時間で解くことができる

- 強双対定理を用いている (ことが多い)
- 効率のよい実装が知られ，様々なソフトウェアが開発されている

事実

線形計画問題として多くの問題がモデル化できる

目次

整数計画問題の例

整数計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ & -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

整数計画問題の例：図

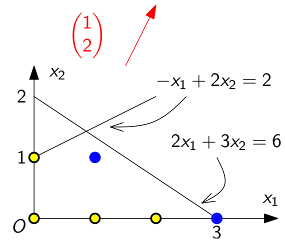
整数計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ & -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

図を描いてみる
そして解いてみる：

- $x_1 = 1, x_2 = 1$ は最適解
- 最適値は 3



整数計画問題

整数計画問題 (integer program)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{array}{lll} \text{maximize} & c^\top x & \\ \text{subject to} & Ax \le b & \leftarrow \text{成分ごとに「}\le\text{」} \\ & x \in \mathbb{Z}^n & \leftarrow \text{整数制約} \end{array}$$

先ほどの例：

- $m = 4$, $n = 2$
- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

整数計画問題に関する実践

事実

整数計画問題を多項式時間で解くアルゴリズムは知られていない

- 実際，NP 困難な問題であると知られている
  (NP 困難性の詳細は，講義『計算理論』を参照)

事実

整数計画問題として多くの問題がモデル化できる

- 線形計画問題よりも多くの問題がモデル化できる
- 多くの組合せ最適化問題もモデル化できる (次回)

目次

整数計画問題の線形計画緩和 (1)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

整数計画問題 (P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

観察

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値

$\because$ (P) の許容領域 $\subseteq$ (LP) の許容領域，かつ，目的が最大化

整数計画問題の線形計画緩和 (2)

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題 (P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y = c, y \geq 0 \end{aligned}$$

強双対定理より

(LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値

((LP) と (DLP) に最適解が存在するならば)

整数計画問題の線形計画緩和 (3)

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y = c, y \geq 0 \end{aligned}$$

(DLP) ＋ 整数制約：(D)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y = c, y \geq 0 \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{aligned}$$

観察

(DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

$\because$ (DLP) の許容領域 $\supseteq$ (D) の許容領域，かつ，目的が最小化

整数計画問題の線形計画緩和 (4)：ここまでのまとめ

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(P)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

(DLP) ＋ 整数制約：(D)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y = c, y \geq 0 \\ & y \in \mathbb{Z}^m \end{aligned}$$

(P) の線形計画緩和：(LP)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

(LP) の双対問題：(DLP)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y = c, y \geq 0 \end{aligned}$$

観察

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

整数計画問題の線形計画緩和 (5)

観察 (再掲)

(P) の最適値 $\leq$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $\leq$ (D) の最適値

すなわち

(P) の最適値 $=$ (D) の最適値 $\Rightarrow$

(P) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $=$ (D) の最適値

帰結：

- (P) は整数計画問題 (多項式時間解法が知られていない)
- (LP) は線形計画問題 (多項式時間解法が知られている)
- (P) の最適値 $=$ (D) の最適値であるとすると…
  - (P) の最適値 $=$ (LP) の最適値
  - すなわち，(LP) を解けば，(P) の最適値が分かる！
  - すなわち，(P) が多項式時間で解ける！？

最後のステップは慎重な議論が必要 (次回以降)

補足：用語の使い分け

〇〇問題

個々の問題を指すことば

- 線形計画問題 (linear program)
- 整数計画問題 (integer program)

〇〇法

その問題を解く方法，その問題によるモデル化法

- 線形計画法 (linear programming)
- 整数計画法 (integer programming)

線形計画緩和 (linear programming relaxation)

目次

この講義のねらい

解きやすい問題	解きにくい問題
多項式時間解法が存在する	NP 困難性が証明されている

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

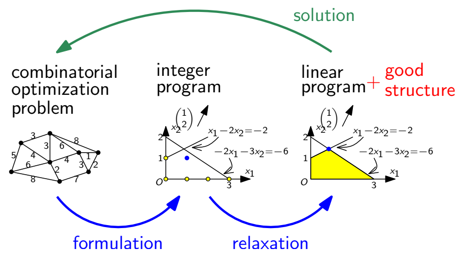
$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

部分的な回答

問題の持つ「多面体構造」が「美しい」と解きやすい

多面体 $=$ 線形計画問題の許容領域

この講義のねらい：流れ



- 組合せ最適化問題を整数計画問題として定式化 (次回)
- 整数計画問題を線形計画問題として緩和 (今回)
- 線形計画問題の「よい」構造を観察 (次々回以降)
- 線形計画問題を用いて組合せ最適化問題の解決 (次々回以降)

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK