離散最適化基礎論 (10) **2014 年 12 月 19 日**

演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2015 年 1 月 9 日

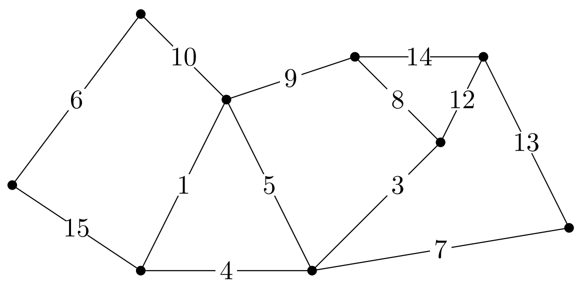
今回の演習問題の多くは最小費用全域木問題を扱う．最小費用全域木問題では，無向グラフ $G = (V, E)$ と非負辺費用関数 $c\colon E \to \mathbb{R}$ が入力として与えられたとき，G の全域木で費用が最小のものを出力する．ただし，全域木の費用とは，その辺の費用の和であるとする．

復習問題 10.1 無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，次の 2 つが同値であることを証明せよ．

1. G は閉路を含まない，かつ，$|E| = |V| - 1$ である．すなわち，G は木である．
2. $|E(S)| \le |S| - 1$ がすべての $S \subseteq V$ $(S \ne \emptyset, V)$ に対して成り立つ，かつ，$|E| = |V| - 1$ である

ただし，$E(S)$ は S に両端点を持つ G の辺全体の集合とする．

復習問題 10.2 Kruskal のアルゴリズムを用いて，次のグラフにおける最小費用全域木を求めよ．(結果だけを答えればよい．)



各辺の上に書かれた数がその辺の費用を表す．

発展復習問題 10.3 最小費用全域木問題に対する 01 整数計画問題としての定式化として，次のものを考え，(P4) と呼ぶことにする．

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} c(e) x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in E(S)} x_e \le |S| - 1 & (\forall\, S \subseteq V, (S \ne \emptyset, V)), \\
& \displaystyle\sum_{e \in E} x_e = |V| - 1, & \\
& x_e \in \{0, 1\} & (\forall\, e \in E).
\end{array}
$$

ただし，$E(S)$ は S に両端点を持つ G の辺全体の集合とする．以下の問いに答えよ．

1. (P4) の線形計画緩和 (LP4) は以下の通りとなる．

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} c(e) x_e \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in E(S)} x_e \le |S| - 1 \\
& \qquad (\forall\, S \subseteq V, (S \ne \emptyset, V)), \\
& \displaystyle\sum_{e \in E} x_e = |V| - 1, \\
& 0 \le x_e \le 1 \qquad (\forall\, e \in E).
\end{array}
$$

入力されたグラフ $G = (V, E)$ に対して，Kruskal のアルゴリズムを実行し，それによって選ばれた G の辺を，選ばれた順に，$f_1, \dots, f_{|V|-1}$ とする．このとき，$x^* \in \mathbb{R}^E$ を

$$
x^*_e = \begin{cases} 0 & (e \notin \{f_1, \dots, f_{|V|-1}\}), \\ 1 & (e \in \{f_1, \dots, f_{|V|-1}\}) \end{cases}
$$

と定義する．この x^* が (LP4) の許容解であることを証明せよ．

2. 線形計画問題 (LP4) の双対問題 (DLP4) は以下の通りとなる．

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \displaystyle -\sum_{S \in 2^V - \{\emptyset, V\}} (|S| - 1) y_s - (|V| - 1) z \\
& \displaystyle \quad - \sum_{e \in E} w_e \\
\text{subject to} & \displaystyle -\sum_{S : e \subseteq S \subsetneq V} y_S - z - w_e \le c(e) \\
& \qquad (\forall\, e \in E), \\
& y_S \ge 0 \qquad (\forall\, S \in 2^V - \{\emptyset, V\}), \\
& w_e \ge 0 \qquad (\forall\, e \in E)
\end{array}
$$

前の小問で得られた $f_1, \dots, f_{|V|-1}$ を考える．任意の $k \in \{1, \dots, |V|-1\}$ に対して，グラフ $(V, \{f_1, \dots, f_k\})$ の連結成分で f_k を含むものの頂点集合を X_k で表す．このとき，$y^* \in \mathbb{R}^{2^V - \{\emptyset, V\}}$，$z^* \in \mathbb{R}$, $w^* \in \mathbb{R}^E$ を次で定義する．

$$
\begin{aligned}
y^*_S &= \begin{cases} c(f_{\ell(k)}) - c(f_k) & \left(\begin{array}{c} \text{ある } k \text{ に対して} \\ S = X_k \text{ のとき} \end{array} \right), \\ 0 & (\text{それ以外のとき}), \end{cases} \\
z^* &= -c(f_{|V|-1}) \\
w^*_e &= 0 \quad (\forall\, e \in E)
\end{aligned}
$$

ただし，

$$\ell(k) = \min\{i > k \mid f_i \in \delta(X_k)\}$$

と定義する．($\delta(X_k)$ は G の辺で，片方の端点のみを X_k に持つもの全体の集合である．)

すべての $e \in E$ に対して費用 $c(e)$ が整数であるとき，y^*, z^*, w^* も整数 (あるいは整数ベクトル) であることを証明せよ．

3. 前の小問で定義した y^*, z^*, w^* が (DLP4) の許容解であることを証明せよ．

4. 任意の $k \in \{1, \ldots, |V|-2\}$ に対して

$$-\sum_{S \subseteq X_k} (|S|-1) \cdot y_S^* = \sum_{e \in E(X_k) \cap F} c(e) - (|X_k|-1) \cdot c(f_{\ell(k)})$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，

$$F = \{f_1, \ldots, f_{|V|-1}\}$$

である．

5. 前の小問を用いて，

$$\sum_{e \in E} c(e) x_e^* = -\sum_{S \in 2^V - \{\emptyset, V\}} (|S|-1) y_s^* - (|V|-1) z^* - \sum_{e \in E} w_e^*$$

となることを証明せよ．

6. 以上のまとめとして，すべての $e \in E$ に対して費用 $c(e)$ が整数であるとき，(DLP4) が整数最適解を持つことを証明せよ．(ヒント：弱双対定理を用いよ．)

補足問題 10.4 無向グラフ $G = (V, E)$ が $|E| \geq |V|$ を満たすとき，G は閉路を含むことを証明せよ．(ヒント：G が木であるとき，$|E| = |V| - 1$ が成り立つことを用いてもよい．G が非連結であるかもしれないので注意．)

追加問題 10.5 (LP4) に挙げた線形計画問題の係数行列は完全ユニモジュラであるとは限らない．その係数行列が完全ユニモジュラとならないグラフの例を挙げよ．(ヒント：例えば，頂点数 6 の閉路を考えてみよ．)