提出締切： 2014 年 12 月 12 日

発展復習問題 8.1 線形計画法を用いて，二部グラフにおける最大マッチングの要素数と最小頂点被覆の要素数が等しいことを証明せよ．

発展復習問題 8.2 有向グラフ $G=(V,A)$，非負整数容量関数 $c\colon A\to\mathbb{Z}$，2 頂点 $s,t\in V$ を考える．

1. 線形計画法を用いて，s から t へ至る最大流の中で，各弧上の流量が整数であるものが存在することを証明せよ．
2. 線形計画法を用いて，s から t へ至る最大流の値と s,t カットの最小容量が等しいことを証明せよ．

補足問題 8.3 二部グラフ $G=(V,E)$ の接続行列を $B\in\{0,1\}^{V\times E}$ として，次の 2 つの問題を考える．

$$\begin{array}{lll}\text{(D2)} & \text{minimize} & 1^\top y\\ & \text{subject to} & B^\top y\geq 1,\\ & & y\geq 0,\\ & & y\in\mathbb{Z}^V.\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}\text{(D2')} & \text{minimize} & 1^\top y\\ & \text{subject to} & B^\top y\geq 1,\\ & & y\geq 0,\\ & & y\in\{0,1\}^V.\end{array}$$

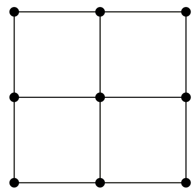
ただし，$0,1$ は適当な次元を持つベクトルで，その成分をすべて 0，1 とするものである．このとき，(D2') の最適解は (D2) の最適解でもあることを証明せよ．

補足問題 8.4 有向グラフ $G=(V,A)$，非負容量関数 $c\colon A\to\mathbb{R}$，2 頂点 $s,t\in V$ を考える．

1. s から t へ至る任意の流れ $f\colon A\to\mathbb{R}$ と任意の s,t カット S に対して次の等式が成り立つことを証明せよ．
$$\mathtt{val}(f)=\sum_{\substack{(u,v)\in A,\\ u\in S,\\ v\notin S}} f((u,v))-\sum_{\substack{(u,v)\in A,\\ u\notin S,\\ v\in S}} f((u,v)).$$
2. 上の小問の結果を用いて，s から t へ至る任意の流れ $f\colon A\to\mathbb{R}$ と任意の s,t カット S に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ．
$$\mathtt{val}(f)\leq\mathtt{cap}(S).$$

追加問題 8.5 二部グラフではない無向グラフの接続行列は完全ユニモジュラであるとは限らない．接続行列が完全ユニモジュラではない無向グラフの中で，頂点数が最小のものを見つけよ．

追加問題 8.6 次の図に挙げる二部グラフにおいて，最大マッチングと最小頂点被覆を見つけ，それらの要素数が等しいことを確認せよ．



追加問題 8.7 二部グラフではない無向グラフで，最大マッチングと最小頂点被覆の要素数が等しいものを見つけよ．(その性質を持つことも示せ．)

追加問題 8.8 有向グラフ $G=(V,A)$，非負整数容量関数 $c\colon A\to\mathbb{Z}$，非負整数費用関数 $\gamma\colon A\to\mathbb{R}$，2 頂点 $s,t\in V$ を考える．s から t へ至る流れ $f\colon A\to\mathbb{R}$ の費用とは

$$\sum_{a\in A}\gamma(a)f(a)$$

で表される量である．与えられた実数 k に対して，値が k であるような s から t へ至る流れの中で，費用が最小のものを見つける問題を最小費用流問題と呼ぶ．

1. 最小費用流問題を線形計画問題として定式化せよ．
2. 値を整数 k とする s から t へ至る最小費用の流れの中で，各弧上の流量が整数であるものが存在することを証明せよ．