提出締切： 2014 年 12 月 5 日

復習問題 7.1 行列 $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ とベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$ を用いて定義された凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$ を考える．

1. P が整凸多面体であるとき，任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して，次の最適化問題の最適値が整数となることを証明せよ．

$$\begin{array}{lll}\text{(LP)} & \text{maximize} & c^\top x \\ & \text{subject to} & Ax \le b\end{array}$$

2. 任意の $c \in \mathbb{Z}^n$ に対して，上の最適化問題 (LP) の最適値が整数となるとき，P が整凸多面体であることを証明せよ．(ヒント：演習問題 7.7 を用いてもよい．)
3. 不等式系 $Ax \le b$ が完全双対整数性を持つとき，P は整凸多面体であることを証明せよ．

復習問題 7.2 次の行列が完全ユニモジュラであるかどうか，理由を添えて答えよ．

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

復習問題 7.3 行列 $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ とベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$ を用いて定義された凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$ を考える．行列 A が完全ユニモジュラであるとき，P の任意の頂点が整数座標しか持たないことを証明せよ．

復習問題 7.4 行列 $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ が完全ユニモジュラであると仮定する．このとき，$[A\ I] \in \mathbb{Z}^{m\times(n+m)}$ も完全ユニモジュラであることを証明せよ．ただし，I は単位行列である．

復習問題 7.5 行列 $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ が完全ユニモジュラであるとき，任意の $b \in \mathbb{Z}^m, c \in \mathbb{Z}^n$ に対して，次の最適化問題が整数最適解を持つことを証明せよ．

$$\begin{array}{lll}\text{(DLP)} & \text{minimize} & b^\top y \\ & \text{subject to} & A^\top y = c, y \ge 0\end{array}$$

復習問題 7.6 二部グラフの接続行列が完全ユニモジュラであることを証明せよ．

補足問題 7.7 行列 $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ とベクトル $b \in \mathbb{Z}^m$ を用いて定義された凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$ を考える．凸多面体 P の任意の頂点 v に対して，v を次の問題の唯一の最適解とするような整数ベクトル $c \in \mathbb{Z}^n$ が存在することを証明せよ．

$$\begin{array}{lll}\text{(LP)} & \text{maximize} & c^\top x \\ & \text{subject to} & Ax \le b\end{array}$$

補足問題 7.8 行列 $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ が完全ユニモジュラであると仮定する．

1. $A^\top$ も完全ユニモジュラであることを証明せよ．
2. $-A^\top$ も完全ユニモジュラであることを証明せよ．
3. $[A\ -A]$ も完全ユニモジュラであることを証明せよ．

追加問題 7.9 次の行列が完全ユニモジュラであるかどうか，理由を添えて答えよ．

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.
2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.
3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

追加問題 7.10 行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ は次の性質を満たすとする．すなわち，任意の列において，1 という成分がちょうど 1 つ存在し，-1 という成分がちょうど 1 つ存在し，その他の成分がすべて 0 である．このとき，A が完全ユニモジュラであることを証明せよ．

発展追加問題 7.11 行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ は次の性質を満たすとする．すなわち，A の各成分は 0 か 1 であり，任意の列において，1 という成分が連続して出現する．言い換えると，任意の $j \in \{1, \dots, n\}$ に対して，ある整数 $b_j, c_j \in \{1, \dots, m\}$ が存在し，

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & (b_j \le i \le c_j \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

と定義する．この行列 A が完全ユニモジュラであることを証明せよ．