提出締切： 2014 年 11 月 7 日

復習問題 4.1 任意の自然数 m, n と任意の $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ を考える．凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ が非空であるとき，次の線形計画問題 (P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

の最適解全体の集合が凸多面体 P の面になることを証明せよ．ヒント：P が有界で非空であることから，(P) は必ず最適解を持つ．この事実を利用してもよい．

追加問題 4.2 自然数 m, n と $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$ で定義される凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ が非空であるとする．このとき，$F \subseteq P$ が P の面であるならば，ある $c \in \mathbb{R}^n$ が存在して，次の線形計画問題 (P)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

の最適解全体の集合が F になることを証明せよ．

追加問題 4.3 次の H 表現を持つ凸多面体 P を考える．

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

1. 凸多面体 P を 3 次元空間に図示せよ．
2. この H 表現に現れる不等式系において，P に対する冗長な不等式をすべて挙げよ．
3. 上で挙げた冗長な不等式をすべて取り除くことによって得られる不等式系を考える．その不等式系を満たす点全体から成る集合を 3 次元空間に図示せよ．(注意：冗長な不等式を 1 つずつ取り除くのではなく，すべてを同時に取り除くことを考えているので，その違いに注意する．)

追加問題 4.4 次の集合 S を考える．

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

1. 集合 S を 2 次元平面上に図示せよ．
2. 集合 S の整凸包 $\text{conv}\{S \cap \mathbb{Z}^2\}$ の頂点をすべて挙げよ．
3. 集合 S の整凸包 $\text{conv}\{S \cap \mathbb{Z}^2\}$ のファセット定義不等式をすべて挙げよ．