離散最適化基礎論　　　　2015 年 2 月 13 日
期末試験　　　　岡本 吉央

14:40–16:10．A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可．
携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．
採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．
採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと．(その文字列は控えておくように．)
採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．

問題 1　無向グラフ $G=(V,E)$ の独立集合とは，頂点部分集合 $S\subseteq V$ で，S の任意の 2 頂点が隣接しないもののことである．最大独立集合問題では，入力として，無向グラフ $G=(V,E)$ と頂点重み関数 $w\colon V\to\mathbb{R}$ が与えられたとき，出力として，G の独立集合の中で，その頂点重み和が最大のものを返す．

最大独立集合問題を 01 整数計画問題として定式化せよ．

問題 2　任意の自然数 m,n と任意の $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $b\in\mathbb{R}^m$, $c\in\mathbb{R}^n$ を考える．凸多面体

$$P=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax\le b\}$$

が非空であるとき，次の線形計画問題 (P)

$$\begin{array}{ll}\text{maximize} & c^\top x\\ \text{subject to} & Ax\le b\end{array}$$

の最適解全体の集合が凸多面体 P の面になることを証明せよ．ヒント：P が有界で非空であることから，(P) は必ず最適解を持つ．この事実を利用してもよい．

問題 3　2 つのベクトル $\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ が生成する凸多面錐の Hilbert 基底を答えよ．

問題 4　無向グラフ $G=(V,E)$ に対して，次の 2 つが同値であることを証明せよ．

1. G は閉路を含まない，かつ，$|E|=|V|-1$ である．すなわち，G は木である．
2. $|E(S)|\le|S|-1$ がすべての $S\subseteq V$ ($S\ne\emptyset,V$) に対して成り立つ，かつ，$|E|=|V|-1$ である．

ただし，$E(S)$ は S に両端点を持つ G の辺全体の集合とする．

問題 5　二部グラフではない無向グラフの接続行列は完全ユニモジュラであるとは限らない．接続行列が完全ユニモジュラではない無向グラフの中で，頂点数が最小のものを見つけよ．

問題 6　最大重みマッチング問題では，無向グラフ $G=(V,E)$ と非負辺重み関数 $w\colon E\to\mathbb{R}$ が入力として与えられ，w に関する G の最大重みマッチングを出力する．

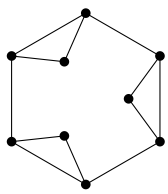
次の問題 (P) は，最大重みマッチング問題を整数計画問題として定式化したものである．

$$\begin{array}{llll}\text{(P)} & \text{maximize} & \displaystyle\sum_{e\in E} w(e)x_e & \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{e\in\delta(v)} x_e\le 1 & (\forall\, v\in V),\\ & & x_e\in\{0,1\} & (\forall\, e\in E).\end{array}$$

ただし，$x\in\mathbb{R}^E$ が変数であり，$\delta(v)$ は頂点 v に接続する辺全体の集合を表す．この問題 (P) の線形計画緩和 (LP) は以下の問題である．

$$\begin{array}{llll}\text{(LP)} & \text{maximize} & \displaystyle\sum_{e\in E} w(e)x_e & \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{e\in\delta(v)} x_e\le 1 & (\forall\, v\in V),\\ & & 0\le x_e\le 1 & (\forall\, e\in E).\end{array}$$

次の図に挙げるグラフを入力とするとき，(P) の整数性ギャップが $\frac{9}{8}$ 以上となることを証明せよ．



(注：整数性ギャップが 1 よりも真に大きいことを証明した場合にも部分点を与える．)

以上