

9:00–10:30. A4用紙(両面自筆書き込み)のみ持ち込み可.  
携帯電話, タブレット等は電源を切ってカバンの中にする事.

採点終了次第, 講義 web ページにて, 得点分布, 講評などを掲載する.

採点結果を知りたい場合は, 解答用紙右上「評点」欄の中に5文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと.(その文字列は覚えておくように.) 採点終了後, そのランダム文字列と得点の対応表を公開する.

**問題 1.** 次のアルゴリズムを考える.

```
1: def fnct2(n)
2:   print "K"
3:   if n == 0
4:     return
5:   elif n % 2 == 0
6:     fnct2(n/2)
7:   else
8:     fnct2(n-1)
9:   end
10: end
```

自然数  $n \geq 0$  に対して,  $\text{fnct2}(n)$  が出力する  $K$  の総数を  $p_n$  で表す. 次の式が成り立つことを証明せよ.

$$p_n \begin{cases} = 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \leq 2 + p_{\lfloor n/2 \rfloor} & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

**問題 2.** 次の漸化式を考える.

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 8 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2a_{n-2} & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

1. 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  の母関数が何であるか, 答えよ.
2. 母関数を用いる方法によって, 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  の一般項  $a_n$  を閉じた形で与えよ.

注意: 母関数を用いる方法によらない解答であっても, 部分点を与える.

**問題 3.** 任意の自然数  $n \geq 2$  を考える.  $n$  個の石を持つブレスレットで, その石の色が赤2個, 青  $n-2$  個のもの総数は何か?

ただし, ブレスレットにおいては, 回転そして裏返しにして同じ石の配置は同じブレスレットであると見なす. コーシー・フロベニウスの定理(バーンサイドの補題)を用いてもよい.

ヒント:  $n$  が偶数の場合と奇数の場合を分けて考えよ.

注意:  $n = 3, 4, 5$  の場合の解答で, 部分点を与える.

**問題 4.** 次の(A), (B)のいずれか一方を選択して解答せよ.

(どちらを選んだか明記すること.(A)と(B)の双方を解答している場合は, どちらも採点されない.)

(A) 3以上の任意の自然数  $n \geq 3$  に対して, 位数  $2n$  の二面体群  $D_n$  は非可換群であることを証明せよ.

(B) 群  $G$  が集合  $X$  に作用するとする. 任意の  $x \in X$  に対して, 固定部分群  $\text{Stab}_G(x)$  が  $G$  の部分群となることを証明せよ.