離散数理工学 第 11 回
離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 1 月 13 日

最終更新：2015 年 1 月 12 日　15:22

スケジュール 前半 (予定)

1. 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/7)

★ 休講 (体育祭) (10/14)

2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/21)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/28)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/4)
5. 離散代数：群と対称性 (11/11)
6. 離散代数：部分群と軌道 (11/18)
7. 離散代数：対称性を考慮した数え上げ (11/25)

スケジュール 後半 (予定)

8. 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/2)
9. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/9)

★ 中間試験 (12/16)

10. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/6)
11. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/13)
12. 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/20)

★ 休講 (海外出張) (1/27)

13. 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (2/3)

★ 期末試験 (2/17?)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

典型的な乱択アルゴリズムの設計と解析ができるようになる

- 確率の推定 (中央値トリック)

目次

不公平な硬貨

設定

- 硬貨が 1 つある
- 投げたとき，表が出る確率はいつも変わらない
- その確率が分からない
- 目標：表が出る確率を知りたい
- 可能な操作：硬貨を投げる (ことのみ)

不公平な硬貨

設定

- 考えている硬貨について
$$\Pr(\text{表}) = p$$
ただし，$0 \leq p \leq 1$
- $\boxed{\text{目標}}$: p を知りたい

単純なアルゴリズム

単純なアルゴリズム

硬貨を何度も投げてみる

- n 回投げるとする (独立な試行)
- 確率変数 X_i を次で定義 ($i \in \{1,\ldots,n\}$)

$$X_i = \begin{cases} 0 & (i \text{ 回目に投げたとき裏が出る}) \\ 1 & (i \text{ 回目に投げたとき表が出る}) \end{cases}$$

- 次の量を出力

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

期待値の解析

- 出力の期待値は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p) \\
&= p
\end{aligned}
$$

期待値は正しい「推測」になっている

問題点

必ず「p」を出力するわけではない $\leadsto$ 誤差が出る

n を大きくすれば，誤差は小さくなりそう

誤差の解析 (1)

以後，$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とする

- 真の値 p から出力 $\frac{X}{n}$ がどれだけずれるか？
- そのずれが ε 未満である確率を知りたい
- その確率は次のように書ける

$$\Pr\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right)$$

- 計算

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right) &= 1 - \Pr\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right), \\
\Pr\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) &\leq \frac{\mathrm{E}\left[\left|\frac{X}{n} - p\right|\right]}{\varepsilon} \quad \text{(マルコフの不等式)}
\end{aligned}$$

しかし，$\mathrm{E}\left[\left|\frac{X}{n} - p\right|\right]$ はどう計算したらいいか分からない

誤差の解析 (2)

$$\Pr\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)=\Pr\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|^2\geq\varepsilon^2\right)\leq\frac{\mathrm{E}\left[\left|\frac{X}{n}-p\right|^2\right]}{\varepsilon^2}$$

$\mathrm{E}\left[\left|\frac{X}{n}-p\right|^2\right]$ を計算してみる

誤差の解析 (3)

$$\mathrm{E}\left[\left|\frac{X}{n}-p\right|^2\right]=\mathrm{E}\left[\left(\frac{X}{n}\right)^2-2p\frac{X}{n}+p^2\right]=\frac{1}{n^2}\mathrm{E}[X^2]-\frac{2p}{n}\mathrm{E}[X]+p^2$$

ここで，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}[X_1+\cdots+X_n]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[X_i]=pn\\ \mathrm{E}[X^2] &= \mathrm{E}[(X_1+\cdots+X_n)^2]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[X_i^2]+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,(i\neq j)}^{n}\mathrm{E}[X_iX_j]\end{aligned}$$

誤差の解析 (4)

任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して

$$E[X_i^2] = (1-p) \cdot 0^2 + p \cdot 1^2 = p$$

したがって，

$$\sum_{i=1}^{n} E[X_i^2] = pn$$

任意の異なる $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，X_i と X_j は独立なので，

$$E[X_i X_j] = (1-p^2) \cdot 0 + p^2 \cdot 1 = p^2$$

したがって，

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,(i \neq j)}^{n} E[X_i X_j] = p^2 n(n-1)$$

誤差の解析 (5)

ここまで，まとめると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\left|\frac{X}{n}-p\right|^2\right] &= \frac{1}{n^2}\mathrm{E}[X^2]-\frac{2p}{n}\mathrm{E}[X]+p^2 \\
&= \frac{1}{n^2}(pn+p^2n(n-1))-\frac{2p}{n}pn+p^2 \\
&= \frac{p}{n}+\frac{p^2(n-1)}{n}-p^2 \\
&= \frac{p-p^2}{n}=\frac{p(1-p)}{n}
\end{aligned}
$$

誤差の解析 (6)

すなわち，

$$\Pr\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{E}\left[\left|\frac{X}{n} - p\right|^2\right]}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{p(1-p)}{n}$$

- この不等式はチェビシェフの不等式と呼ばれる (ものの特殊な場合)
- この右辺を δ 以下にするには，$n \geq \dfrac{1}{\varepsilon^2}\dfrac{p(1-p)}{\delta}$ とすればよい

結論

誤差が ε 以上になる確率を δ 以下とするためには，

$$n \geq \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{p(1-p)}{\delta}$$

とすればよい

疑問

単純なアルゴリズム

硬貨を何度も投げてみる

- n 回投げるとする (独立な試行)
- 確率変数 X_i を次で定義 ($i \in \{1, \ldots, n\}$) (標示確率変数)

$$X_i = \begin{cases} 1 & (i\ \text{回目に投げたとき表が出る}) \\ 0 & (i\ \text{回目に投げたとき裏が出る}) \end{cases}$$

- 次の量を出力

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

疑問

この「単純なアルゴリズム」よりもよいアルゴリズムは無いのか？

目次

中央値トリック (median trick)

中央値トリック

- n 回投げるとする (独立な試行)
- $n = (2k-1)t$ とする (k, t は自然数)
- 確率変数 X_i を次で定義 ($i \in \{1, \ldots, n\}$)

$$X_i = \begin{cases} 0 & (i \text{ 回目に投げたとき裏が出る}) \\ 1 & (i \text{ 回目に投げたとき表が出る}) \end{cases}$$

- 確率変数 Y_j を次で定義 ($j \in \{1, \ldots, 2k-1\}$)

$$Y_j = \frac{X_{(j-1)t+1} + \cdots + X_{(j-1)t+t}}{t}$$

- 次の量を出力

$$Y = \mathrm{med}\{Y_1, \ldots, Y_{2k-1}\}$$

med は中央値：$\mathrm{med}\{5, 1, 6, 2, 4\} = 4$

中央値トリック：誤差の解析 (1)

- 次が成り立つために n が満たす条件を見つけたい

$$\Pr(|Y - p| \geq \varepsilon) \leq \delta$$

- 今までの議論から，任意の $j \in \{1, \ldots, 2k-1\}$ に対して

$$\Pr\left(|Y_j - p| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{p(1-p)}{t}$$

- $t \geq \dfrac{8p(1-p)}{\varepsilon^2}$ とすると，

$$\Pr\left(|Y_j - p| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{8}$$

中央値トリック：誤差の解析 (2)

- このとき，
  $\Pr(k \text{ 個の } j \text{ に対して}, |Y_j - p| \geq \varepsilon)$
  $$< \binom{2k-1}{k}\left(\frac{1}{8}\right)^k \leq \left(\frac{e(2k-1)}{k}\right)^k\left(\frac{1}{8}\right)^k < \left(\frac{2e}{8}\right)^k < \left(\frac{3}{4}\right)^k$$
- したがって，
  $$\begin{aligned}\Pr(|Y - p| \geq \varepsilon) &\leq \Pr(k \text{ 個の } j \text{ に対して}, |Y_j - p| \geq \varepsilon)\\ &< \left(\frac{3}{4}\right)^k\end{aligned}$$
- $k \geq \log_{3/4}\delta$ とすると
  $$\Pr(|Y - p| \geq \varepsilon) < \left(\frac{3}{4}\right)^k \leq \delta$$

中央値トリック：誤差の解析 (まとめ)

中央値トリック：誤差の解析 (まとめ)

- $t \geq \dfrac{8p(1-p)}{\varepsilon^2}$， $k \geq \log_{3/4} \delta$ とすると
  誤差が ε 以上になる確率を δ 以下にできる
- このとき，硬貨を投げる回数 n は

$$n = (2k-1)t \geq \Omega\left(\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2} \log \frac{1}{\delta}\right)$$

補足：単純なアルゴリズムにて，硬貨を投げる回数 n は

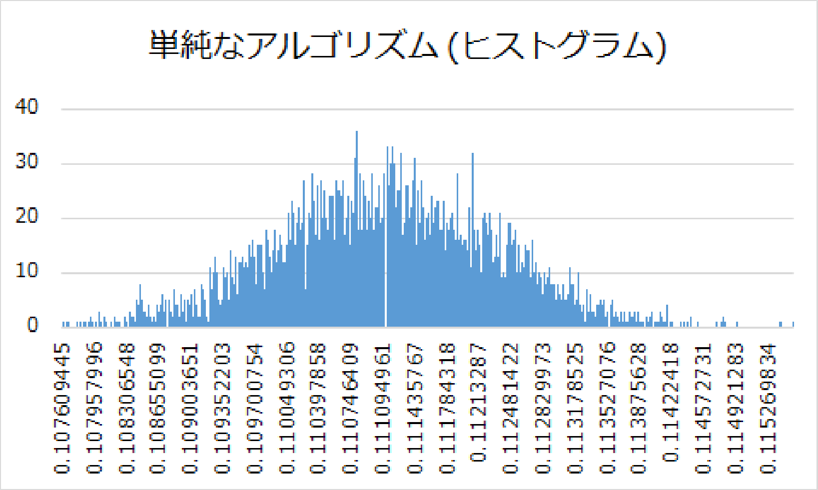
$$n \geq \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2} \frac{1}{\delta}$$

つまり，中央値トリックにより，硬貨を投げる回数が減った

実験してみた

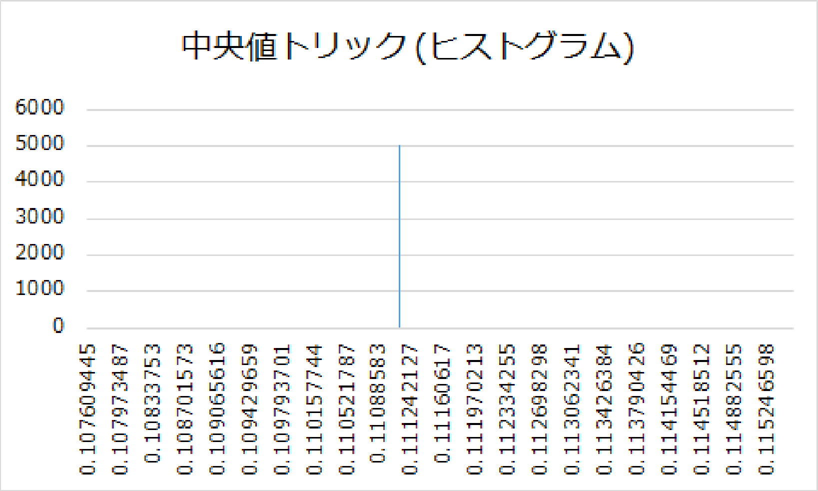
- パラメータ
  - $p = 0.111111$
  - $2k - 1 = 9$
  - $t = 7901$
  - $n = (2k - 1)t = 71109$
- Ruby 2.1.4 で実装
- 5000 回動かして，推定した p の度数分布 (ヒストグラム) を見てみた
- 横軸が推定した p の値，縦軸が度数 (頻度)

実験してみた：単純なアルゴリズム



平均 0.1111089，標準偏差 0.0011736

実験してみた：中央値トリック



平均 0.1111111，標準偏差 1.22541×10^{-14} (つまり，0.0000000)

目次

今日の目標

今日の目標

典型的な乱択アルゴリズムの設計と解析ができるようになる

- 確率の推定 (中央値トリック)

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次