

離散数理工学 第 7 回  
離散代数：対称性を考慮した数え上げ

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 11 月 25 日

最終更新：2014 年 12 月 9 日 08:23

## スケジュール 前半 (予定)

- |   |                      |         |
|---|----------------------|---------|
| 1 | 数え上げの基礎：二項係数と二項定理    | (10/7)  |
| ★ | 休講 (体育祭)             | (10/14) |
| 2 | 数え上げの基礎：漸化式の立て方      | (10/21) |
| 3 | 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) | (10/28) |
| 4 | 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) | (11/4)  |
| 5 | 離散代数：群と対称性           | (11/11) |
| 6 | 離散代数：部分群と軌道          | (11/18) |
| 7 | 離散代数：対称性を考慮した数え上げ    | (11/25) |

注意：予定の変更もありうる

## スケジュール 後半 (予定)

- 8 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/2)
- 9 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/9)
- ★ 中間試験 (12/16)
- 10 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/6)
- 11 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/13)
- 12 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/20)
- ★ 休講 (海外出張) (1/27)
- 13 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (2/3)
- ★ 期末試験 (2/17?)

注意：予定の変更もありうる

### 中間試験

- ▶ 日時
  - ▶ 12月16日(火)：1限(遅刻しないように)
- ▶ 出題範囲
  - ▶ 第1回から第7回(今回)まで
- ▶ 出題形式
  - ▶ 演習問題と同じ形式の問題を4題出題する
  - ▶ その中の2題は演習問題として提示されたものと同ーである(複数の演習問題が組み合わせられて1題とされる可能性もある)(「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - ▶ 全問に解答する
- ▶ 配点：1題15点満点，計60点満点
- ▶ 時間：90分
- ▶ 持ち込み：A4用紙1枚分(裏表自筆書き込み)のみ可

### 今日の目標

群構造を用いて、対称性を考慮した数え上げができるようになる

- ▶ 軌道固定部分群定理
- ▶ コーシー・フロベニウスの定理 (バーンサイドの補題)

## 目次

- ① 前回の復習
- ② 軌道固定部分群定理の証明
- ③ コーシー・フロベニウスの定理 (バーンサイドの補題)
- ④ コーシー・フロベニウスの定理 (バーンサイドの補題) : 証明
- ⑤ 今日のまとめ

## 部分群

群  $(G, \circ)$ ,  $H \subseteq G$

## 部分群とは？

$(H, \circ)$  が群であるとき,  $H$  を  $G$  の部分群と呼ぶ

注意:  $(G, \circ)$  と  $(H, \circ)$  における演算は同一

## 部分群とは?: 定義の言い換え

$H$  が  $G$  の部分群であるとは,

- ▶  $x, y \in H \Rightarrow x \circ y \in H$  (演算の保存)
- ▶  $G$  の単位元  $e$  に対して,  $e \in H$  (単位元の保存)
- ▶  $x \in H \Rightarrow G$  における  $x$  の逆元  $x^{-1}$  に対して  $x^{-1} \in H$  (逆元の保存)

## ラグランジュの定理：群に関する数え上げにおける最重要定理

## ラグランジュの定理

$G$  : 有限群  
 $H$  :  $G$  の部分群  $\Rightarrow |H|$  は  $|G|$  の約数 ( $|G|/|H|$  は整数)



## 剰余類

群  $G$ , 部分群  $H \subseteq G$ , 要素  $g \in G$

$H$  の (左) 剰余類とは？

$g$  に関する  $H$  の (左) 剰余類とは,

$$gH = \{gh \mid h \in H\}$$

## 剰余類と同値分割

群  $G$ , 部分群  $H \subseteq G$

$G$  上の二項関係  $\sim$  を次で定義

任意の  $a, b \in G$  に対して

$$a \sim b \Leftrightarrow aH = bH$$

これは  $G$  上の同値関係なので,  $G$  の同値分割を与え, それを  $G/H$  と書く

つまり,

$G/H = \{gH \mid g \in G\}$  は  $G$  の分割

## 群の作用と軌道

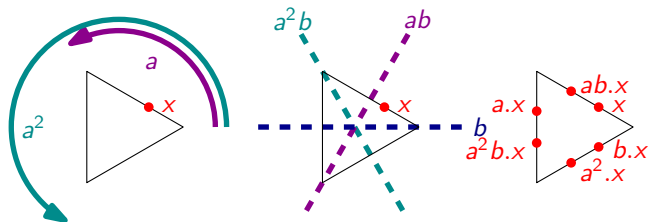
群  $G$  が集合  $X$  に作用

軌道とは？

要素  $x \in X$  の軌道とは,

$$G.x = \{g.x \mid g \in G\}$$

例：正三角形に作用する  $D_3$  (回転・鏡映)



## 固定部分群

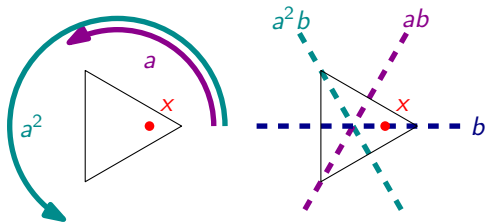
群  $G$  が集合  $X$  に作用

### 固定部分群とは？

要素  $x \in X$  の**固定部分群** (または, 安定化群) とは,

$$\text{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid g.x = x\}$$

例：正三角形に作用する  $D_3$  (回転・鏡映)



$$\text{Stab}_{D_3}(x) = \{e, b\}$$

## 軌道固定部分群定理

群  $G$  が集合  $X$  に作用

軌道固定部分群定理 (群作用の基本定理とも呼ばれる)

任意の  $x \in X$  に対して,  $|G/\text{Stab}_G(x)| = |G.x|$

ラグランジュの定理より,  $|G|/|\text{Stab}_G(x)| = |G/\text{Stab}_G(x)|$  なので,

$$|G|/|\text{Stab}_G(x)| = |G.x|$$

となり, すなわち, 任意の  $x \in X$  に対して

$$|G| = |G.x| |\text{Stab}_G(x)|$$

## 軌道固定部分群定理：使い方 (1)

## 例題 1

正  $n$  角形の回転対称性を表す群の位数は何か？

解答例：考える群を  $G$  とし、正  $n$  角形の 1 頂点を  $x$  とする

- ▶ このとき、 $|G.x| = n$
- ▶ また、 $\text{Stab}_G(x) = \{e\}$  であるので、 $|\text{Stab}_G(x)| = 1$
- ▶ したがって、 $|G| = |G.x| |\text{Stab}_G(x)| = n$



## 軌道固定部分群定理：使い方 (2)

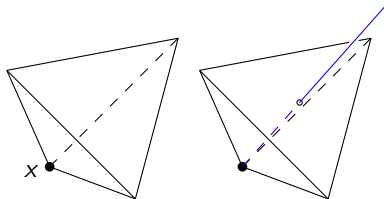
## 例題 2

正四面体の回転対称性を表す群の位数は何か？

解答例：考える群を  $G$  とし、正四面体の 1 頂点を  $x$  とする

- ▶  $G$  の作用により、 $x$  は正四面体の任意の頂点にうつるので、  
 $|G \cdot x| = 4$
- ▶  $x$  を固定する  $G$  の作用は、 $x$  とその対面の中心を結ぶ直線の周りの回転のみなので、それは巡回群  $C_3$  の作用と同一視でき、  
 $|\text{Stab}_G(x)| = |C_3| = 3$
- ▶ したがって、 $|G| = |G \cdot x| |\text{Stab}_G(x)| = 4 \cdot 3 = 12$

□



## 目次

- ① 前回の復習
- ② 軌道固定部分群定理の証明
- ③ コーシー・フロベニウスの定理 (バーンサイドの補題)
- ④ コーシー・フロベニウスの定理 (バーンサイドの補題) : 証明
- ⑤ 今日のまとめ



## 軌道固定部分群定理の証明 (1)

群  $G$  が集合  $X$  に作用

軌道固定部分群定理 (群作用の基本定理とも呼ばれる)

任意の  $x \in X$  に対して,  $|G/\text{Stab}_G(x)| = |G.x|$

証明:  $G/\text{Stab}_G(x)$  から  $G.x$  への全単射  $f$  を構成する

$f$  の構成

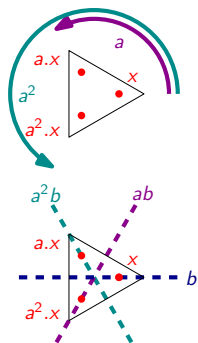
$G/\text{Stab}_G(x) = \{g\text{Stab}_G(x) \mid g \in G\}$  から  $G.x = \{g.x \mid g \in G\}$  への写像  $f$  を次で構成

$$f(g\text{Stab}_G(x)) = g.x$$

証明すべきこと

- ▶  $f$  が写像としてちゃんと定義されていること
- ▶  $f$  が全単射であること (全射であり, かつ, 単射であること)

## 軌道固定部分群定理の証明：例

例：正三角形に作用する  $D_3$  (回転・鏡映)

- ▶  $\text{Stab}_{D_3}(x) = \{e, b\}$
- ▶  $\{e, b\} = e\text{Stab}_{D_3}(x) = b\text{Stab}_{D_3}(x)$
- ▶  $\{a, ab\} = a\text{Stab}_{D_3}(x) = ab\text{Stab}_{D_3}(x)$
- ▶  $\{a^2, a^2b\} = a^2\text{Stab}_{D_3}(x) = a^2b\text{Stab}_{D_3}(x)$
- ▶  $D_3/\text{Stab}_{D_3}(x) = \{\{e, b\}, \{a, ab\}, \{a^2, a^2b\}\}$
- ▶  $D_3.x = \{x, a.x, a^2.x\}$

$$e\text{Stab}_{D_3}(x) = b\text{Stab}_{D_3}(x) = \{e, b\} \xrightarrow{f} e.x = b.x$$

$$a\text{Stab}_{D_3}(x) = ab\text{Stab}_{D_3}(x) = \{a, ab\} \xrightarrow{f} a.x = ab.x$$

$$a^2\text{Stab}_{D_3}(x) = a^2b\text{Stab}_{D_3}(x) = \{a^2, a^2b\} \xrightarrow{f} a^2.x = a^2b.x$$

## 軌道固定部分群定理の証明 (2) : 写像として成り立っていることの確認

$g\text{Stab}_G(x), g'\text{Stab}_G(x) \in G/\text{Stab}_G(x)$  で,  
 $g\text{Stab}_G(x) = g'\text{Stab}_G(x)$  とする

- ▶  $g\text{Stab}_G(x) = \{gh \mid h \in \text{Stab}_G(x)\}$  かつ  $e \in \text{Stab}_G(x)$  なので,  
 $g = ge \in g\text{Stab}_G(x)$
- ▶  $g'\text{Stab}_G(x) = \{g'h \mid h \in \text{Stab}_G(x)\}$  なので,  
 ある  $h \in \text{Stab}_G(x)$  に対して,  $g = g'h$
- ▶ このとき,

$$\begin{aligned} g.x &= (g'h).x && (g = g'h \text{ より}) \\ &= g'.(h.x) && (\text{作用の定義より}) \\ &= g'.x && (h \in \text{Stab}_G(x) \text{ より}) \end{aligned}$$

## 軌道固定部分群定理：証明 (全射性)

$y \in G.x$  とする

- ▶ すなわち，ある  $g \in G$  が存在して， $y = g.x$
- ▶ このとき， $g\text{Stab}_G(x) \in G/\text{Stab}_G(x)$
- ▶ したがって， $f(g\text{Stab}_G(x)) = g.x = y$

## 軌道固定部分群定理：証明 (単射性)

$g\text{Stab}_G(x), g'\text{Stab}_G(x) \in G/\text{Stab}_G(x)$  とする

- ▶  $f(g\text{Stab}_G(x)) = f(g'\text{Stab}_G(x))$  と仮定 (すなわち,  $g.x = g'.x$ )
- ▶ このとき,  

$$x = e.x = (g^{-1}g).x = g^{-1}.(g.x) = g^{-1}.(g'.x) = (g^{-1}g').x$$
- ▶ すなわち,  $g^{-1}g' \in \text{Stab}_G(x)$
- ▶  $g\text{Stab}_G(x) = \{gh \mid h \in \text{Stab}_G(x)\}$  なので,  $g' = gg^{-1}g' \in g\text{Stab}_G(x)$
- ▶ 次の補題により,  $g'\text{Stab}_G(x) = g\text{Stab}_G(x)$  □

## 補題

群  $G$ , その任意の部分群  $H \subseteq G$ , 任意の要素  $g, g' \in G$  に対して,

$$g' \in gH \quad \Rightarrow \quad g'H = gH$$

## 目次

- ① 前回の復習
- ② 軌道固定部分群定理の証明
- ③ コーシー・フロベニウスの定理 (バーンサイドの補題)
- ④ コーシー・フロベニウスの定理 (バーンサイドの補題) : 証明
- ⑤ 今日のまとめ

## 軌道に関する補題

群  $G$  が集合  $X$  に作用

 $X$  上の二項関係

$x, y \in X$  に対して,  $x \sim y$  であることを  $G.x = G.y$  と定義する

## 補題 1

この二項関係  $\sim$  は  $X$  上の同値関係, すなわち

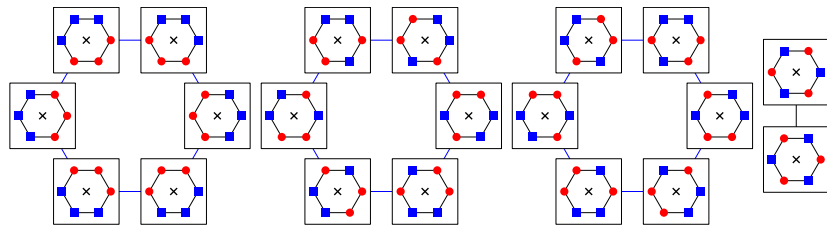
- ▶ 任意の  $x \in X$  に対して,  $G.x = G.x$
- ▶ 任意の  $x, y \in X$  に対して,  $G.x = G.y$  ならば  $G.y = G.x$
- ▶ 任意の  $x, y, z \in X$  に対して,  $G.x = G.y$  かつ  $G.y = G.z$  ならば  $G.x = G.z$

つまり,  $X$  は軌道によって分割される

- ▶ その分割を  $X/G$  と書く

## 軌道による分割：例

- ▶  $X$  = 正六角形の頂点集合を赤3つ青3つで塗る方法全体の集合
- ▶  $C_6$  は  $X$  に作用する (回転対称性)

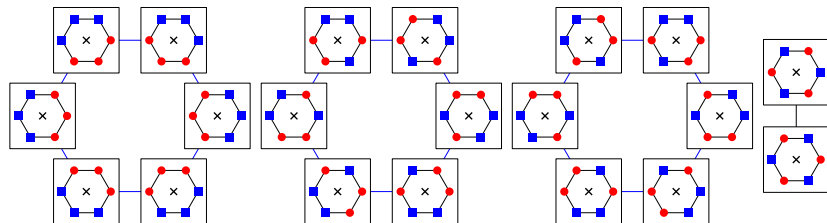


$$|X| = \binom{6}{3} = 20$$



## 軌道による分割：例

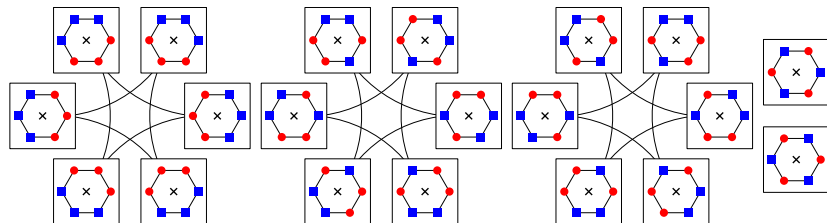
- ▶  $X =$  正六角形の頂点集合を赤3つ青3つで塗る方法全体の集合
- ▶  $C_6$  は  $X$  に作用する



60度回転による作用  $\rightsquigarrow$  4個の軌道に分割

## 軌道による分割：例

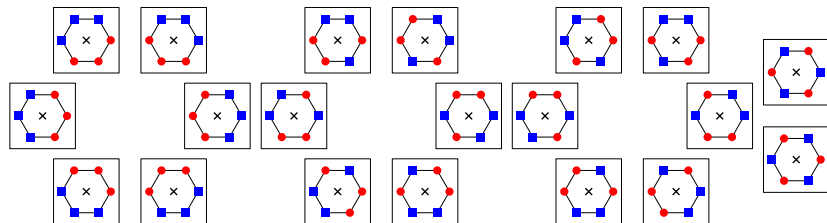
- ▶  $X$  = 正六角形の頂点集合を赤3つ青3つで塗る方法全体の集合
- ▶  $C_6$  は  $X$  に作用する



120度回転による作用  $\rightsquigarrow$  8個の軌道に分割

## 軌道による分割：例

- ▶  $X =$  正六角形の頂点集合を赤3つ青3つで塗る方法全体の集合
- ▶  $C_6$  は  $X$  に作用する



0 度回転による作用  $\rightsquigarrow$  20 個の軌道に分割

## 軌道による分割：例

- ▶  $X =$  正六角形の頂点集合を赤3つ青3つで塗る方法全体の集合
- ▶  $C_6$  は  $X$  に作用する

$$X/C_6 = \left\{ \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \\ \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \\ \text{Diagram 15} \\ \text{Diagram 16} \\ \text{Diagram 17} \\ \text{Diagram 18} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 19} \\ \text{Diagram 20} \\ \text{Diagram 21} \\ \text{Diagram 22} \\ \text{Diagram 23} \\ \text{Diagram 24} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 25} \\ \text{Diagram 26} \\ \text{Diagram 27} \\ \text{Diagram 28} \\ \text{Diagram 29} \\ \text{Diagram 30} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 31} \\ \text{Diagram 32} \\ \text{Diagram 33} \\ \text{Diagram 34} \\ \text{Diagram 35} \\ \text{Diagram 36} \end{array} \right\} \right\}$$

$|X/C_6|$  が異なるネックレスの総数 (回転を考慮した数え上げ)

## 軌道による分割：例

- ▶  $X$  = 正六角形の頂点集合を赤3つ青3つで塗る方法全体の集合
- ▶  $C_6$  は  $X$  に作用する

$$X/C_6 = \left\{ \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \\ \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \\ \text{Diagram 15} \\ \text{Diagram 16} \\ \text{Diagram 17} \\ \text{Diagram 18} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 19} \\ \text{Diagram 20} \\ \text{Diagram 21} \\ \text{Diagram 22} \\ \text{Diagram 23} \\ \text{Diagram 24} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 25} \\ \text{Diagram 26} \\ \text{Diagram 27} \\ \text{Diagram 28} \\ \text{Diagram 29} \\ \text{Diagram 30} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 31} \\ \text{Diagram 32} \end{array} \right\} \right\}$$

$$|\text{Stab}_{C_6}(\text{Diagram 1})| = 1, \quad |\text{Stab}_{C_6}(\text{Diagram 31})| = 3$$

## 軌道による分割：例

- ▶  $X$  = 正六角形の頂点集合を赤3つ青3つで塗る方法全体の集合
- ▶  $C_6$  は  $X$  に作用する

$$X/C_6 = \left\{ \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \\ \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \\ \text{Diagram 15} \\ \text{Diagram 16} \\ \text{Diagram 17} \\ \text{Diagram 18} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 19} \\ \text{Diagram 20} \end{array} \right\} \right\}$$

The diagrams are regular hexagons with a central 'x'. Each has 3 red dots and 3 blue squares. The first three groups contain 6 diagrams each, and the last group contains 2 diagrams. The last two diagrams are highlighted in light blue.

$$\frac{1}{|C_6|}(1 \cdot 18 + 3 \cdot 2) = \frac{1}{6}(18 + 6) = \frac{24}{6} = 4 = |X/C_6|$$

## 軌道による分割：例

- ▶  $X$  = 正六角形の頂点集合を赤3つ青3つで塗る方法全体の集合
- ▶  $C_6$  は  $X$  に作用する

$$X/C_6 = \left\{ \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \\ \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \\ \text{Diagram 15} \\ \text{Diagram 16} \\ \text{Diagram 17} \\ \text{Diagram 18} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 19} \\ \text{Diagram 20} \\ \text{Diagram 21} \\ \text{Diagram 22} \\ \text{Diagram 23} \\ \text{Diagram 24} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 25} \\ \text{Diagram 26} \\ \text{Diagram 27} \\ \text{Diagram 28} \\ \text{Diagram 29} \\ \text{Diagram 30} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 31} \\ \text{Diagram 32} \end{array} \right\} \right\}$$

120度の回転により変わらない塗り方は2個

## 軌道による分割：例

- ▶  $X$  = 正六角形の頂点集合を赤3つ青3つで塗る方法全体の集合
- ▶  $C_6$  は  $X$  に作用する

$$X/C_6 = \left\{ \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \\ \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \\ \text{Diagram 15} \\ \text{Diagram 16} \\ \text{Diagram 17} \\ \text{Diagram 18} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 19} \\ \text{Diagram 20} \\ \text{Diagram 21} \\ \text{Diagram 22} \\ \text{Diagram 23} \\ \text{Diagram 24} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 25} \\ \text{Diagram 26} \\ \text{Diagram 27} \\ \text{Diagram 28} \\ \text{Diagram 29} \\ \text{Diagram 30} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 31} \\ \text{Diagram 32} \end{array} \right\} \right\}$$

The diagram shows 32 hexagons arranged in four rows. Each hexagon has a central 'x' and six vertices colored red or blue. The first three rows contain 6 hexagons each, and the fourth row contains 2 hexagons. The last two hexagons in the fourth row are highlighted with a green background.

240度の回転により変わらない塗り方は2個



## 軌道による分割：例

- ▶  $X$  = 正六角形の頂点集合を赤3つ青3つで塗る方法全体の集合
- ▶  $C_6$  は  $X$  に作用する

$$X/C_6 = \left\{ \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{red} \quad \text{blue} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{red} \quad \text{blue} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{blue} \quad \text{red} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{blue} \quad \text{red} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} , \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{blue} \quad \text{blue} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{red} \quad \text{red} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{red} \quad \text{red} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{red} \quad \text{red} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} , \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{blue} \quad \text{blue} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{red} \quad \text{red} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{red} \quad \text{red} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{red} \quad \text{red} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} , \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{red} \quad \text{red} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{blue} \quad \text{blue} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{red} \quad \text{red} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{blue} \quad \text{blue} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} , \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{red} \quad \text{red} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{blue} \quad \text{blue} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{blue} \quad \text{blue} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{red} \quad \text{red} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} , \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{red} \quad \text{red} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{blue} \quad \text{blue} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{blue} \quad \text{blue} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{red} \quad \text{red} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} \right\} , \\
 \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{red} \quad \text{red} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{blue} \quad \text{blue} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{blue} \quad \text{blue} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{blue} \quad \text{blue} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} , \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{red} \quad \text{red} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{blue} \quad \text{blue} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{red} \quad \text{red} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{red} \quad \text{red} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} , \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{red} \quad \text{red} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{blue} \quad \text{blue} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{red} \quad \text{red} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{blue} \quad \text{blue} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} , \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{red} \quad \text{red} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{blue} \quad \text{blue} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{blue} \quad \text{blue} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{red} \quad \text{red} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} \right\} , \\
 \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{red} \quad \text{red} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{blue} \quad \text{blue} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{red} \quad \text{red} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{red} \quad \text{red} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} , \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{red} \quad \text{red} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{blue} \quad \text{blue} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{blue} \quad \text{blue} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{blue} \quad \text{blue} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} \right\} \right\}$$

60度, 180度, 300度の回転により変わらない塗り方は0個

## 軌道による分割：例

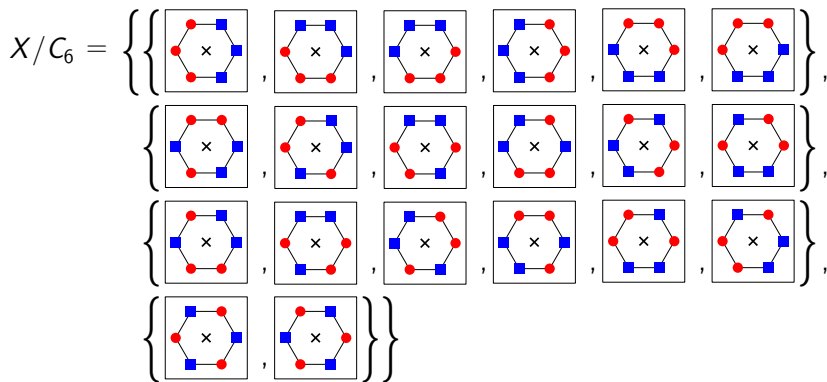
- ▶  $X$  = 正六角形の頂点集合を赤3つ青3つで塗る方法全体の集合
- ▶  $C_6$  は  $X$  に作用する

$$X/C_6 = \left\{ \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \\ \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \\ \text{Diagram 15} \\ \text{Diagram 16} \\ \text{Diagram 17} \\ \text{Diagram 18} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 19} \\ \text{Diagram 20} \\ \text{Diagram 21} \\ \text{Diagram 22} \\ \text{Diagram 23} \\ \text{Diagram 24} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 25} \\ \text{Diagram 26} \\ \text{Diagram 27} \\ \text{Diagram 28} \\ \text{Diagram 29} \\ \text{Diagram 30} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 31} \\ \text{Diagram 32} \\ \text{Diagram 33} \\ \text{Diagram 34} \\ \text{Diagram 35} \\ \text{Diagram 36} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 37} \\ \text{Diagram 38} \\ \text{Diagram 39} \\ \text{Diagram 40} \\ \text{Diagram 41} \\ \text{Diagram 42} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 43} \\ \text{Diagram 44} \\ \text{Diagram 45} \\ \text{Diagram 46} \\ \text{Diagram 47} \\ \text{Diagram 48} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 49} \\ \text{Diagram 50} \\ \text{Diagram 51} \\ \text{Diagram 52} \\ \text{Diagram 53} \\ \text{Diagram 54} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 55} \\ \text{Diagram 56} \\ \text{Diagram 57} \\ \text{Diagram 58} \\ \text{Diagram 59} \\ \text{Diagram 60} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 61} \\ \text{Diagram 62} \\ \text{Diagram 63} \\ \text{Diagram 64} \\ \text{Diagram 65} \\ \text{Diagram 66} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 67} \\ \text{Diagram 68} \\ \text{Diagram 69} \\ \text{Diagram 70} \\ \text{Diagram 71} \\ \text{Diagram 72} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 73} \\ \text{Diagram 74} \\ \text{Diagram 75} \\ \text{Diagram 76} \\ \text{Diagram 77} \\ \text{Diagram 78} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 79} \\ \text{Diagram 80} \\ \text{Diagram 81} \\ \text{Diagram 82} \\ \text{Diagram 83} \\ \text{Diagram 84} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 85} \\ \text{Diagram 86} \\ \text{Diagram 87} \\ \text{Diagram 88} \\ \text{Diagram 89} \\ \text{Diagram 90} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 91} \\ \text{Diagram 92} \\ \text{Diagram 93} \\ \text{Diagram 94} \\ \text{Diagram 95} \\ \text{Diagram 96} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 97} \\ \text{Diagram 98} \\ \text{Diagram 99} \\ \text{Diagram 100} \\ \text{Diagram 101} \\ \text{Diagram 102} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 103} \\ \text{Diagram 104} \\ \text{Diagram 105} \\ \text{Diagram 106} \\ \text{Diagram 107} \\ \text{Diagram 108} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 109} \\ \text{Diagram 110} \\ \text{Diagram 111} \\ \text{Diagram 112} \\ \text{Diagram 113} \\ \text{Diagram 114} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 115} \\ \text{Diagram 116} \\ \text{Diagram 117} \\ \text{Diagram 118} \\ \text{Diagram 119} \\ \text{Diagram 120} \end{array} \right\} \right\}$$

0度の回転により変わらない塗り方は20個

軌道による分割：例

- ▶  $X$  = 正六角形の頂点集合を赤 3 つ青 3 つで塗る方法全体の集合
- ▶  $C_6$  は  $X$  に作用する



$$\frac{1}{|C_6|}(2 + 2 + 0 \cdot 3 + 20) = \frac{24}{6} = 4 = |X/C_6|$$

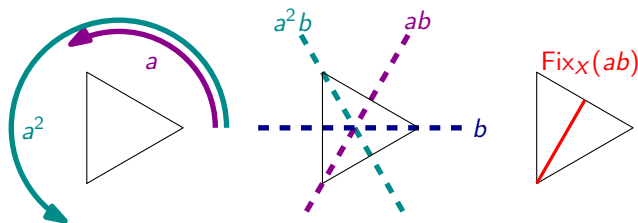
## 不動点集合

群  $G$  が集合  $X$  に作用

不動点集合とは？

要素  $g \in G$  の不動点集合とは,

$$\text{Fix}_X(g) = \{x \in X \mid g.x = x\}$$

例：正三角形に作用する  $D_3$  (回転・鏡映)
 $\text{Fix}_X(ab)$  は赤い線分,  $\text{Fix}_X(a) = \emptyset$

## コーシー・フロベニウスの定理

有限群  $G$  が有限集合  $X$  に作用

## コーシー・フロベニウスの定理

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\text{Stab}_G(x)| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_X(g)|$$

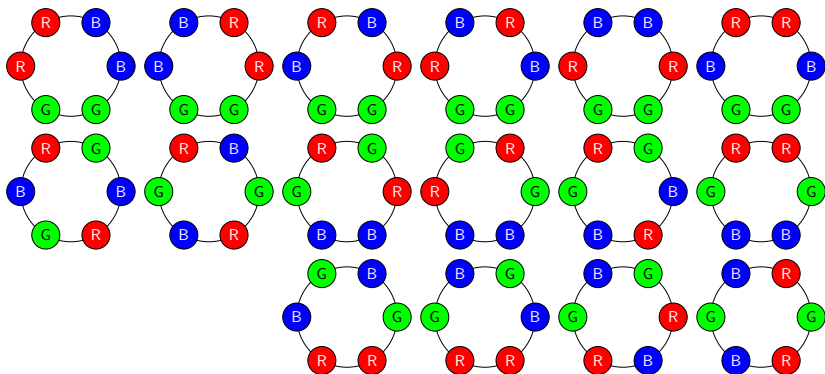
バーンサイドの補題, 軌道数え上げ定理, などとも呼ばれる

# コーシー・フロベニウスの定理 : 使い方 (1)

## 問題

6個の石を持つネックレスで、その石の色が赤2つ、青2つ、緑2つのものの総数はいくつ？

ネックレス = 回転して同じものは同じと見なす



16

## コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (1)

## 問題

6個の石を持つネックレスで、その石の色が赤2つ、青2つ、緑2つのものの総数はいくつ？

石を正六角形の頂点に置くものとする

▶ 対称性を考慮しない塗り方の総数  $= \binom{6}{2} \binom{4}{2} = 15 \cdot 6 = 90$

考える対称性を表す群は  $C_6$

- ▶  $|C_6| = 6$
- ▶  $C_6$  の要素は 0 度, 60 度, 120 度, 180 度, 240 度, 300 度の回転を表す

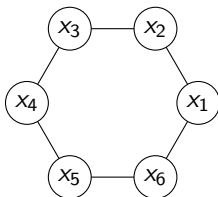
## コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (1)

## 問題

6個の石を持つネックレスで、その石の色が赤2つ、青2つ、緑2つのものの総数はいくつ？

正六角形の頂点の色を反時計回り順に  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  とする

- ▶ 0度回転によって変わらない塗り方の総数 = 90





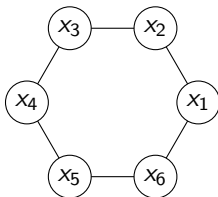
## コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (1)

## 問題

6 個の石を持つネックレスで、その石の色が赤 2 つ、青 2 つ、緑 2 つのものの総数はいくつ？

正六角形の頂点の色を反時計回り順に  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  とする

- ▶ 60 度回転によって変わらない塗り方の総数は？
- ▶ そのような塗り方において、  
 $x_1 = x_2, x_2 = x_3, x_3 = x_4, x_4 = x_5, x_5 = x_6, x_6 = x_1$
- ▶ つまり、総数 = 0



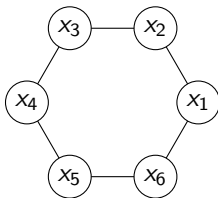
## コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (1)

## 問題

6 個の石を持つネックレスで、その石の色が赤 2 つ、青 2 つ、緑 2 つのものの総数はいくつ？

正六角形の頂点の色を反時計回り順に  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  とする

- ▶ 120 度回転によって変わらない塗り方の総数は？
- ▶ そのような塗り方において、  
 $x_1 = x_3, x_2 = x_4, x_3 = x_5, x_4 = x_6, x_5 = x_1, x_6 = x_2$
- ▶ つまり、総数 = 0



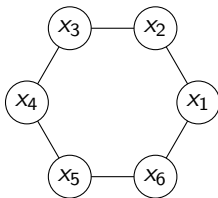
## コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (1)

## 問題

6 個の石を持つネックレスで、その石の色が赤 2 つ、青 2 つ、緑 2 つのものの総数はいくつ？

正六角形の頂点の色を反時計回り順に  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  とする

- ▶ 180 度回転によって変わらない塗り方の総数は？
- ▶ そのような塗り方において、  
 $x_1 = x_4, x_2 = x_5, x_3 = x_6, x_4 = x_1, x_5 = x_2, x_6 = x_3$
- ▶ つまり、総数 =  $3 \cdot 2 = 6$



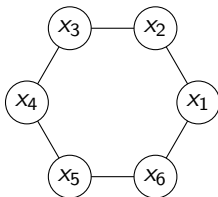
## コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (1)

## 問題

6 個の石を持つネックレスで、その石の色が赤 2 つ、青 2 つ、緑 2 つのものの総数はいくつ？

正六角形の頂点の色を反時計回り順に  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  とする

- ▶ 240 度回転によって変わらない塗り方の総数は？
- ▶ そのような塗り方において、  
 $x_1 = x_5, x_2 = x_6, x_3 = x_1, x_4 = x_2, x_5 = x_3, x_6 = x_4$
- ▶ つまり、総数 = 0



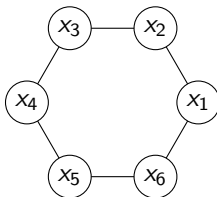
## コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (1)

## 問題

6 個の石を持つネックレスで、その石の色が赤 2 つ、青 2 つ、緑 2 つのものの総数はいくつ？

正六角形の頂点の色を反時計回り順に  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  とする

- ▶ 300 度回転によって変わらない塗り方の総数は？
- ▶ そのような塗り方において、  
 $x_1 = x_6, x_2 = x_1, x_3 = x_2, x_4 = x_3, x_5 = x_4, x_6 = x_5$
- ▶ つまり、総数 = 0



## コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (1)

## 問題

6個の石を持つネックレスで、その石の色が赤2つ、青2つ、緑2つのものの総数はいくつ？

- ▶ 0度回転によって変わらない塗り方の総数 = 90
- ▶ 60度回転によって変わらない塗り方の総数 = 0
- ▶ 120度回転によって変わらない塗り方の総数 = 0
- ▶ 180度回転によって変わらない塗り方の総数 = 6
- ▶ 240度回転によって変わらない塗り方の総数 = 0
- ▶ 300度回転によって変わらない塗り方の総数 = 0

コーシー・フロベニウスの定理により

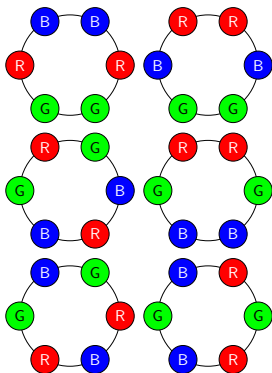
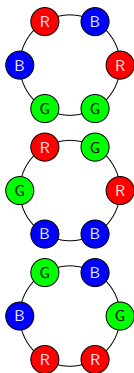
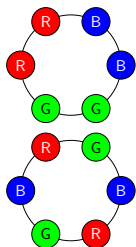
$$\text{総数} = \frac{1}{6}(90 + 0 + 0 + 6 + 0 + 0) = \frac{96}{6} = 16$$

## コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (2)

### 問題

6個の石を持つブレスレットで、その石の色が赤2つ、青2つ、緑2つのものの総数はいくつ？

ブレスレット = 回転や鏡映 (裏返し) によって同じものは同じと見なす



## コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (2)

## 問題

6個の石を持つブレスレットで、その石の色が赤2つ、青2つ、緑2つのものの総数はいくつ？

石を正六角形の頂点に置くものとする

▶ 対称性を考慮しない塗り方の総数  $= \binom{6}{2} \binom{4}{2} = 15 \cdot 6 = 90$

考える対称性を表す群は二面体群  $D_6$

- ▶  $|D_6| = 12$
- ▶  $D_6$  の要素は 0 度, 60 度, 120 度, 180 度, 240 度, 300 度の回転のほか, 6 個の鏡映変換を表す

回転に関して変わらない塗り方はネックレスの場合と同じ



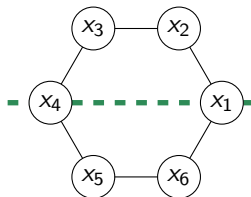
## コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (2)

## 問題

6 個の石を持つブレスレットで、その石の色が赤 2 つ、青 2 つ、緑 2 つのものの総数はいくつ？

正六角形の頂点の色を反時計回り順に  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  とする

- ▶ 図のように 2 頂点を通る軸に関する鏡映によって変わらない塗り方の総数は？
- ▶ そのような塗り方において、 $x_2 = x_6, x_3 = x_5$
- ▶ つまり、 $x_1 = x_4$  でなければならず、総数  $= 3 \cdot 2 = 6$



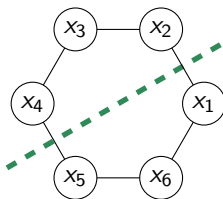
## コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (2)

## 問題

6 個の石を持つブレスレットで、その石の色が赤 2 つ、青 2 つ、緑 2 つのものの総数はいくつ？

正六角形の頂点の色を反時計回り順に  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  とする

- ▶ 図のように 2 辺の中点を通る軸に関する鏡映によって変わらない塗り方の総数は？
- ▶ そのような塗り方において、 $x_1 = x_2, x_3 = x_6, x_4 = x_5$
- ▶ つまり、総数 =  $3 \cdot 2 = 6$



## コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (2)

## 問題

6個の石を持つブレスレットで、その石の色が赤2つ、青2つ、緑2つのものの総数はいくつ？

コーシー・フロベニウスの定理により

$$\text{総数} = \frac{1}{12}(90 + 0 + 0 + 6 + 0 + 0 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 3) = \frac{132}{12} = 11$$

## 目次

- ① 前回の復習
- ② 軌道固定部分群定理の証明
- ③ コーシー・フロベニウスの定理 (バーンサイドの補題)
- ④ コーシー・フロベニウスの定理 (バーンサイドの補題) : 証明
- ⑤ 今日のまとめ

## コーシー・フロベニウスの定理

有限群  $G$  が有限集合  $X$  に作用

## コーシー・フロベニウスの定理

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\text{Stab}_G(x)| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_X(g)|$$

バーンサイドの補題, 軌道数え上げ定理, などとも呼ばれる

## コーシー・フロベニウスの定理 : 証明

補題 1 によって得られる軌道による  $X$  の分割が次のように書けるとする

$$X = G.x_1 \cup \cdots \cup G.x_m \quad (\text{つまり, } |X/G| = m)$$

- ▶ 軌道固定部分群定理とラグランジュの定理より,  
任意の  $i \in \{1, \dots, m\}$  に対して,  $|G|/|\text{Stab}_G(x_i)| = |G.x_i|$
- ▶ すなわち,  $|\text{Stab}_G(x_i)| = \frac{|G|}{|G.x_i|}$
- ▶ 補題 2 より, 任意の  $x \in G.x_i$  に対して,  $|\text{Stab}_G(x)| = |\text{Stab}_G(x_i)|$
- ▶ したがって, 任意の  $x \in G.x_i$  に対して,  $|\text{Stab}_G(x)| = \frac{|G|}{|G.x_i|}$

## 補題 2 (演習問題)

$x, y \in X$  に対して,  $y \in G.x$  ならば,  $|\text{Stab}_G(x)| = |\text{Stab}_G(y)|$

## コーシー・フロベニウスの定理 : 証明

▶ すなわち, 
$$\sum_{x \in G \cdot x_i} |\text{Stab}_G(x)| = \sum_{x \in G \cdot x_i} \frac{|G|}{|G \cdot x_i|} = |G \cdot x_i| \frac{|G|}{|G \cdot x_i|} = |G|$$

▶ したがって, 
$$\sum_{i=1}^m \sum_{x \in G \cdot x_i} |\text{Stab}_G(x)| = |G|m$$

▶ ここで,  $X$  は  $G \cdot x_1, \dots, G \cdot x_m$  によって分割されているので,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{x \in G \cdot x_i} |\text{Stab}_G(x)| = \sum_{x \in X} |\text{Stab}_G(x)|$$

▶ したがって, 
$$m = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\text{Stab}_G(x)|$$

## コーシー・フロベニウスの定理 : 証明

## 証明すべきこと

$$\sum_{x \in X} |\text{Stab}_G(x)| = \sum_{g \in G} |\text{Fix}_X(g)|$$

次の量を数える :  $|\{(x, g) \in X \times G \mid g.x = x\}|$

$$|\{(x, g) \in X \times G \mid g.x = x\}| = \sum_{x \in X} |\{g \in G \mid g.x = x\}|$$

$$= \sum_{x \in X} |\text{Stab}_G(x)|$$

$$|\{(x, g) \in X \times G \mid g.x = x\}| = \sum_{g \in G} |\{x \in X \mid g.x = x\}|$$

$$= \sum_{g \in G} |\text{Fix}_X(g)|$$

したがって,  $\sum_{x \in X} |\text{Stab}_G(x)| = \sum_{g \in G} |\text{Fix}_X(g)|$

□



## 目次

- ① 前回の復習
- ② 軌道固定部分群定理の証明
- ③ コーシー・フロベニウスの定理 (バーンサイドの補題)
- ④ コーシー・フロベニウスの定理 (バーンサイドの補題) : 証明
- ⑤ 今日のまとめ

## 今日の目標

## 今日の目標

群構造を用いて、対称性を考慮した数え上げができるようになる

- ▶ 軌道固定部分群定理
- ▶ コーシー・フロベニウスの定理 (バーンサイドの補題)

## 残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
  - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
  - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - ▶ 内容は何でも OK
  - ▶ 匿名で OK

## 目次

- ① 前回の復習
- ② 軌道固定部分群定理の証明
- ③ コーシー・フロベニウスの定理 (バーンサイドの補題)
- ④ コーシー・フロベニウスの定理 (バーンサイドの補題) : 証明
- ⑤ 今日のまとめ