離散数理工学 第 6 回
離散代数：部分群と軌道

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 11 月 18 日

最終更新：2014 年 11 月 21 日　10:03

スケジュール 前半 (予定)

1. 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/7)

⋆ 休講 (体育祭) (10/14)

2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/21)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/28)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/4)
5. 離散代数：群と対称性 (11/11)
6. 離散代数：部分群と軌道 (11/18)
7. 離散代数：対称性を考慮した数え上げ (11/25)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/2)
9. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/9)
- ⋆ 中間試験 (12/16)
10. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/6)
11. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/13)
12. 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/20)
- ⋆ 休講 (海外出張) (1/27)
13. 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (2/3)
- ⋆ 期末試験 (2/17?)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

群の構造，特に部分群を深く理解する

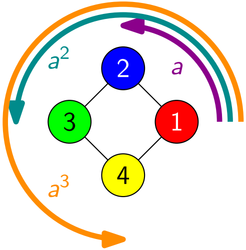
- 部分群，剰余類
- ラグランジュの定理
- 軌道，固定部分群

「対称性を考慮した数え上げ」に対する準備

目次

巡回群による作用

巡回群 C_n の各要素は正 n 角形の回転を表す

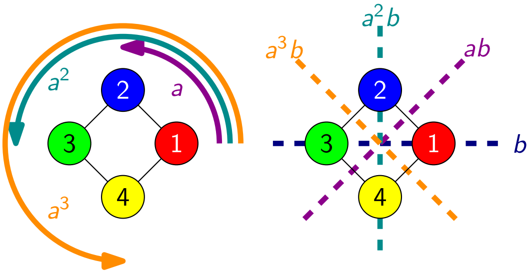


$C_n = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ であり，

- a^k は $360^\circ k/n$ 回転を表す

二面体群による作用

二面体群 D_n の各要素は正 n 角形の回転・鏡映を表す

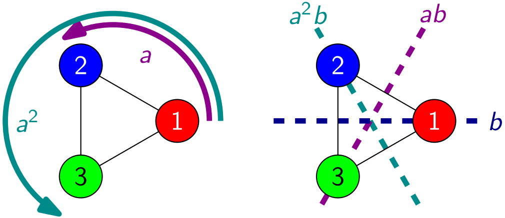


$D_n = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \ldots, a^{n-1}b\}$ であり，

- a^k は $360^\circ k/n$ 回転を表す
- $a^k b$ は傾き $180^\circ k/n$ の直線に関する鏡映を表す

二面体群による作用 (2)

二面体群 D_n の各要素は正 n 角形の回転・鏡映を表す



$D_n = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \ldots, a^{n-1}b\}$ であり，

- a^k は $360^\circ k/n$ 回転を表す
- $a^k b$ は傾き $180^\circ k/n$ の直線に関する鏡映を表す

目次

部分群

群 $(G, \circ)$，$H \subseteq G$

部分群とは？

$(H, \circ)$ が群であるとき，H を G の部分群と呼ぶ

注意：$(G, \circ)$ と $(H, \circ)$ における演算は同一

部分群とは?: 定義の言い換え

H が G の部分群であるとは，

- $x, y \in H \Rightarrow x \circ y \in H$ (演算の保存)
- G の単位元 e に対して，$e \in H$ (単位元の保存)
- $x \in H \Rightarrow G$ における x の逆元 x^{-1} に対して $x^{-1} \in H$ (逆元の保存)

部分群：例

$G = \{e, a, a^2, a^3\}$

群表

$\circ$	e	a	a^2	a^3
e	e	a	a^2	a^3
a	a	a^2	a^3	e
a^2	a^2	a^3	e	a
a^3	a^3	e	a	a^2

次のそれぞれは部分群か？

1. $H_1 = \{e, a, a^2\}$
2. $H_2 = \{e, a\}$
3. $H_3 = \{e, a^2\}$
4. $H_4 = \{e\}$

部分群：例

$G = \{e, a, a^2, a^3\}$

群表

$\circ$	e	a	a^2
e	e	a	a^2
a	a	a^2	a^3
a^2	a^2	a^3	e

1. $H_1 = \{e, a, a^2\}$

部分群：例

$G = \{e, a, a^2, a^3\}$

群表

$\circ$	e	a	a^2
e	e	a	a^2
a	a	a^2	a^3
a^2	a^2	a^3	e

1. $H_1 = \{e, a, a^2\}$
   - $a \circ a^2 = a^3 \notin H_1$ なので，H_1 は G の部分群ではない

(これだけが理由である，というわけではない)

部分群：例

$$G = \{e, a, a^2, a^3\}$$

群表

$\circ$	e	a		
e	e	a		
a	a	a^2		

2. $H_2 = \{e, a\}$

部分群：例

$G = \{e, a, a^2, a^3\}$

群表

$\circ$	e	a
e	e	a
a	a	a^2

2. $H_2 = \{e, a\}$

- $a \circ a = a^2 \notin H_2$ なので，H_2 は G の部分群ではない

(これだけが理由である，というわけではない)

部分群：例

$$G = \{e, a, a^2, a^3\}$$

群表

$\circ$	e	a^2
e	e	a^2
a^2	a^2	e

3. $H_3 = \{e, a^2\}$

部分群：例

$G = \{e, a, a^2, a^3\}$

群表

$\circ$	e	a^2
e	e	a^2
a^2	a^2	e

3. $H_3 = \{e, a^2\}$

- $e \in H$

部分群：例

$G = \{e, a, a^2, a^3\}$

群表

$\circ$	e	a^2
e	e	a^2
a^2	a^2	e

3. $H_3 = \{e, a^2\}$

- $e \in H$
- $e \circ e = a^2 \circ a^2 = e \in H$
- $e \circ a^2 = a^2 \circ e = a^2 \in H$

部分群：例

$G = \{e, a, a^2, a^3\}$

群表

$\circ$	e	a^2
e	e	a^2
a^2	a^2	e

3. $H_3 = \{e, a^2\}$

- $e \in H$
- $e \circ e = a^2 \circ a^2 = e \in H$
- $e \circ a^2 = a^2 \circ e = a^2 \in H$
- G における e の逆元は e で，$e \in H$
- G における a^2 の逆元は a^2 で，$a^2 \in H$

部分群：例

$G = \{e, a, a^2, a^3\}$

群表

$\circ$	e	a^2
e	e	a^2
a^2	a^2	e

3. $H_3 = \{e, a^2\}$
   - $e \in H$
   - $e \circ e = a^2 \circ a^2 = e \in H$
   - $e \circ a^2 = a^2 \circ e = a^2 \in H$
   - G における e の逆元は e で，$e \in H$
   - G における a^2 の逆元は a^2 で，$a^2 \in H$

したがって，H_3 は G の部分群

部分群：例

$G = \{e, a, a^2, a^3\}$

群表

$\circ$	e
e	e

4. $H_4 = \{e\}$

部分群：例

$G = \{e, a, a^2, a^3\}$

群表

$\circ$	e
e	e

4 $H_4 = \{e\}$ (自明な部分群とも呼ばれる)

H_4 は G の部分群

部分群であるための必要十分条件

群 $(G, \circ)$，部分集合 $H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

部分群であるための必要十分条件

H が G の部分群である $\Leftrightarrow$ 任意の $a, b \in H$ に対して，$a^{-1}b \in H$

$\Rightarrow$ の証明：H が G の部分群であると仮定する

- 任意の $a, b \in H$ を考える
-
- $a^{-1}b \in H$ $\square$

部分群であるための必要十分条件

群 $(G, \circ)$，部分集合 $H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

部分群であるための必要十分条件

H が G の部分群である $\Leftrightarrow$ 任意の $a, b \in H$ に対して，$a^{-1}b \in H$

$\Rightarrow$ の証明：H が G の部分群であると仮定する

- 任意の $a, b \in H$ を考える
- H は G の部分群なので，$a^{-1} \in H$
- $a^{-1}b \in H$ $\square$

部分群であるための必要十分条件

群 $(G, \circ)$，部分集合 $H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

部分群であるための必要十分条件

H が G の部分群である $\Leftrightarrow$ 任意の $a, b \in H$ に対して，$a^{-1}b \in H$

$\Rightarrow$ の証明：H が G の部分群であると仮定する

- 任意の $a, b \in H$ を考える
- H は G の部分群なので，$a^{-1} \in H$
- H は G の部分群で，$a^{-1}, b \in H$ なので，$a^{-1}b \in H$ $\square$

部分群であるための必要十分条件 (続 1)

群 $(G, \circ)$，部分集合 $H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

部分群であるための必要十分条件

H が G の部分群である $\Leftrightarrow$ 任意の $a, b \in H$ に対して，$a^{-1}b \in H$

<u>$\Leftarrow$ の証明</u>：任意の $a, b \in H$ に対して $a^{-1}b \in H$ であると仮定する

- このとき,「演算の保存」,「単位元の保存」,「逆元の保存」を確認する

部分群であるための必要十分条件 (続 1)

群 $(G, \circ)$，部分集合 $H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

部分群であるための必要十分条件

H が G の部分群である $\Leftrightarrow$ 任意の $a, b \in H$ に対して，$a^{-1}b \in H$

$\Leftarrow$ の証明：任意の $a, b \in H$ に対して $a^{-1}b \in H$ であると仮定する

- このとき,「演算の保存」,「単位元の保存」,「逆元の保存」を確認する

単位元の保存

部分群であるための必要十分条件 (続 1)

群 $(G, \circ)$，部分集合 $H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

部分群であるための必要十分条件

H が G の部分群である $\Leftrightarrow$ 任意の $a, b \in H$ に対して，$a^{-1}b \in H$

$\Leftarrow$ の証明：任意の $a, b \in H$ に対して $a^{-1}b \in H$ であると仮定する

- このとき,「演算の保存」,「単位元の保存」,「逆元の保存」を確認する

単位元の保存

- $H \neq \emptyset$ なので，ある $x \in G$ が存在して $x \in H$

部分群であるための必要十分条件 (続 1)

群 $(G, \circ)$，部分集合 $H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

部分群であるための必要十分条件

H が G の部分群である $\Leftrightarrow$ 任意の $a, b \in H$ に対して，$a^{-1}b \in H$

$\Leftarrow$ の証明：任意の $a, b \in H$ に対して $a^{-1}b \in H$ であると仮定する

- このとき,「演算の保存」,「単位元の保存」,「逆元の保存」を確認する

単位元の保存

- $H \neq \emptyset$ なので，ある $x \in G$ が存在して $x \in H$
- 仮定において $a = b = x$ とすると，$x^{-1}x \in H$ が得られる

部分群であるための必要十分条件 (続 1)

群 $(G, \circ)$，部分集合 $H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

部分群であるための必要十分条件

H が G の部分群である $\Leftrightarrow$ 任意の $a, b \in H$ に対して，$a^{-1}b \in H$

$\Leftarrow$ の証明：任意の $a, b \in H$ に対して $a^{-1}b \in H$ であると仮定する

- このとき,「演算の保存」,「単位元の保存」,「逆元の保存」を確認する

単位元の保存

- $H \neq \emptyset$ なので，ある $x \in G$ が存在して $x \in H$
- 仮定において $a = b = x$ とすると，$x^{-1}x \in H$ が得られる
- 逆元の定義より，$x^{-1}x = e$ なので，$e \in H$ □

部分群であるための必要十分条件 (続 2)

群 $(G, \circ)$，部分集合 $H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

部分群であるための必要十分条件

H が G の部分群である $\Leftrightarrow$ 任意の $a, b \in H$ に対して，$a^{-1}b \in H$

$\Leftarrow$ の証明 (続)：

部分群であるための必要十分条件 (続 2)

群 $(G, \circ)$，部分集合 $H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

部分群であるための必要十分条件

H が G の部分群である $\Leftrightarrow$ 任意の $a, b \in H$ に対して，$a^{-1}b \in H$

<u>$\Leftarrow$ の証明 (続)</u>：

$\boxed{\text{逆元の保存}}$：$x \in H$ とする

$\boxed{\text{演算の保存}}$：

これで 3 つの性質の成立が確かめられた □

部分群であるための必要十分条件 (続 2)

群 $(G, \circ)$，部分集合 $H \subseteq G$， $H \neq \emptyset$

部分群であるための必要十分条件

H が G の部分群である $\Leftrightarrow$ 任意の $a, b \in H$ に対して， $a^{-1}b \in H$

$\Leftarrow$ の証明 (続)：

$\boxed{\text{逆元の保存}}$: $x \in H$ とする

- 仮定において $a = x, b = e$ とすると， $x^{-1}e \in H$ が得られる

$\boxed{\text{演算の保存}}$:

これで 3 つの性質の成立が確かめられた $\square$

部分群であるための必要十分条件 (続 2)

群 $(G, \circ)$，部分集合 $H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

部分群であるための必要十分条件

H が G の部分群である $\Leftrightarrow$ 任意の $a, b \in H$ に対して，$a^{-1}b \in H$

$\Leftarrow$ の証明 (続)：

$\boxed{\text{逆元の保存}}$：$x \in H$ とする

- 仮定において $a = x, b = e$ とすると，$x^{-1}e \in H$ が得られる
- 単位元の定義より，$x^{-1}e = x^{-1}$ なので，$x^{-1} \in H$ □

$\boxed{\text{演算の保存}}$：

これで 3 つの性質の成立が確かめられた □

部分群であるための必要十分条件 (続 2)

群 $(G, \circ)$，部分集合 $H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

部分群であるための必要十分条件

H が G の部分群である $\Leftrightarrow$ 任意の $a, b \in H$ に対して，$a^{-1}b \in H$

$\Leftarrow$ の証明 (続)：

$\boxed{\text{逆元の保存}}$：$x \in H$ とする

- 仮定において $a = x, b = e$ とすると，$x^{-1}e \in H$ が得られる
- 単位元の定義より，$x^{-1}e = x^{-1}$ なので，$x^{-1} \in H$ □

$\boxed{\text{演算の保存}}$：$x, y \in H$ とする

これで 3 つの性質の成立が確かめられた □

部分群であるための必要十分条件 (続 2)

群 $(G, \circ)$，部分集合 $H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

部分群であるための必要十分条件

H が G の部分群である $\Leftrightarrow$ 任意の $a, b \in H$ に対して，$a^{-1}b \in H$

$\Leftarrow$ の証明 (続)：

$\boxed{\text{逆元の保存}}$：$x \in H$ とする

- 仮定において $a = x, b = e$ とすると，$x^{-1}e \in H$ が得られる
- 単位元の定義より，$x^{-1}e = x^{-1}$ なので，$x^{-1} \in H$ □

$\boxed{\text{演算の保存}}$：$x, y \in H$ とする

- 仮定において，$a = x^{-1}, b = y$ とすると，$(x^{-1})^{-1}y \in H$ が得られる

これで 3 つの性質の成立が確かめられた □

部分群であるための必要十分条件 (続 2)

群 $(G, \circ)$，部分集合 $H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

部分群であるための必要十分条件

H が G の部分群である $\Leftrightarrow$ 任意の $a, b \in H$ に対して，$a^{-1}b \in H$

$\Leftarrow$ の証明 (続)：

$\boxed{\text{逆元の保存}}$：$x \in H$ とする

- 仮定において $a = x, b = e$ とすると，$x^{-1}e \in H$ が得られる
- 単位元の定義より，$x^{-1}e = x^{-1}$ なので，$x^{-1} \in H$ □

$\boxed{\text{演算の保存}}$：$x, y \in H$ とする

- 仮定において，$a = x^{-1}, b = y$ とすると，$(x^{-1})^{-1}y \in H$ が得られる
- 演習問題 5.11 より，$(x^{-1})^{-1} = x$ なので，$xy \in H$ となる □

これで 3 つの性質の成立が確かめられた □

ラグランジュの定理：群に関する数え上げにおける最重要定理

ラグランジュの定理

G：有限群
H：G の部分群 $\Rightarrow$ $|H|$ は $|G|$ の約数 ($|G|/|H|$ は整数)

証明は次の節で

部分群：例 (再考)

$G = \{e, a, a^2, a^3\}$

群表

$\circ$	e	a	a^2	a^3
e	e	a	a^2	a^3
a	a	a^2	a^3	e
a^2	a^2	a^3	e	a
a^3	a^3	e	a	a^2

次のそれぞれは部分群か？

1. $H_1 = \{e, a, a^2\}$
2. $H_2 = \{e, a\}$
3. $H_3 = \{e, a^2\}$
4. $H_4 = \{e\}$

$|G| = 4$ なので，ラグランジュの定理より

$$H \text{ が } G \text{ の部分群ならば，} |H| \in \{1, 2, 4\}$$

部分群：例 (再考)

$G = \{e, a, a^2, a^3\}$

群表

$\circ$	e	a	a^2	a^3
e	e	a	a^2	a^3
a	a	a^2	a^3	e
a^2	a^2	a^3	e	a
a^3	a^3	e	a	a^2

次のそれぞれは部分群か？

1. $H_1 = \{e, a, a^2\}$ ←ラグランジュの定理に反するので，部分群ではない
2. $H_2 = \{e, a\}$
3. $H_3 = \{e, a^2\}$
4. $H_4 = \{e\}$

$|G| = 4$ なので，ラグランジュの定理より

$$H \text{ が } G \text{ の部分群ならば，} |H| \in \{1, 2, 4\}$$

目次

剰余類

群 G，部分群 $H \subseteq G$，要素 $g \in G$

H の (左) 剰余類とは？

g に関する H の (左) 剰余類とは，

$$gH = \{gh \mid h \in H\}$$

剰余類：例

$G = \{e, a, a^2, a^3\}$

群表

$\circ$	e	a	a^2	a^3
e	e	a	a^2	a^3
a	a	a^2	a^3	e
a^2	a^2	a^3	e	a
a^3	a^3	e	a	a^2

部分群 $H = \{e, a^2\}$

- $eH = \{ee, ea^2\} = \{e, a^2\}$
- $aH = \{ae, aa^2\} = \{a, a^3\}$
- $a^2H = \{a^2e, a^2a^2\} = \{a^2, e\} = \{e, a^2\}$
- $a^3H = \{a^3e, a^3a^2\} = \{a^3, a\} = \{a, a^3\}$

観察：$eH = a^2H, aH = a^3H, eH \cap aH = \emptyset$

剰余類と同値関係

群 G，部分群 $H \subseteq G$

G の上の二項関係 $\sim$ を次で定義

任意の $a, b \in G$ に対して

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad aH = bH$$

先ほどの例：$e \sim a^2$，$a \sim a^3$

命題 1

上で定義した $\sim$ は G 上の同値関係，つまり，次の 3 つを満たす

- 任意の $a \in G$ に対して，$aH = aH$ (反射性)
- 任意の $a, b \in G$ に対して，$aH = bH$ ならば $bH = aH$ (対称性)
- 任意の $a, b, c \in G$ に対して，$aH = bH$ かつ $bH = cH$ ならば $aH = cH$ (推移性)

これが成り立つことはすぐ分かる

剰余類と同値分割

群 G，部分群 $H \subseteq G$

G の上の二項関係 $\sim$ を次で定義

任意の $a, b \in G$ に対して

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad aH = bH$$

これは G 上の同値関係なので，G の同値分割を与える

つまり，

$G / \sim = \{gH \mid g \in G\}$ は G の分割

この同値分割を G/H と書く (注：$\frac{G}{H}$ とは書かない)

先ほどの例：$G = \{e, a, a^2, a^3\}$，$H = \{e, a^2\}$

$eH = a^2H = \{e, a^2\}$，$aH = a^3H = \{a, a^3\}$ なので，

$$G/H = \{\{e, a^2\}, \{a, a^3\}\}$$

剰余類の要素数

有限群 G，部分群 $H \subseteq G$

命題 2 (剰余類の要素数)

任意の $a, b \in G$ に対して，$|aH| = |bH|$

先ほどの例：$G = \{e, a, a^2, a^3\}$, $H = \{e, a^2\}$

- $eH = a^2H = \{e, a^2\}$：要素数 2
- $aH = a^3H = \{a, a^3\}$：要素数 2

<u>証明の方針</u>：aH から bH への全単射が存在することを示せばよい

剰余類の要素数：証明

有限群 G，部分群 $H \subseteq G$

命題 2 (剰余類の要素数)

任意の $a, b \in G$ に対して，$|aH| = |bH|$

証明：aH から bH への全単射が存在することを示せばよい

剰余類の要素数：証明

有限群 G，部分群 $H \subseteq G$

命題 2 (剰余類の要素数)

任意の $a, b \in G$ に対して，$|aH| = |bH|$

証明：aH から bH への全単射が存在することを示せばよい

復習：関数 $f \colon aH \to bH$ が全単射であるとは

- 任意の $y \in bH$ に対して，ある $x \in aH$ が存在して，$f(x) = y$ (全射性)
- 任意の $x, x' \in aH$ に対して，$f(x) = f(x')$ ならば $x = x'$ (単射性)

f の構成：任意の $x \in aH$ に対して，$f(x) = ba^{-1}x$ とする

剰余類の要素数：証明 (続 1)

全射性の証明

- 任意の $y \in bH$ を考える

剰余類の要素数：証明 (続 1)

全射性の証明

- 任意の $y \in bH$ を考える
- すなわち，ある $h \in H$ が存在して，$y = bh$

定義の復習：$bH = \{bh \mid h \in H\}$

剰余類の要素数：証明 (続 1)

全射性の証明

- 任意の $y \in bH$ を考える
- すなわち，ある $h \in H$ が存在して，$y = bh$
- $x = ab^{-1}y$ とすると，$x = ab^{-1}bh = ah$ なので，$x \in aH$

定義の復習：$bH = \{bh \mid h \in H\}$

剰余類の要素数：証明 (続 1)

全射性の証明

- 任意の $y \in bH$ を考える
- すなわち，ある $h \in H$ が存在して，$y = bh$
- $x = ab^{-1}y$ とすると，$x = ab^{-1}bh = ah$ なので，$x \in aH$
- また，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ba^{-1}x && (f \text{ の定義}) \\
&= ba^{-1}ab^{-1}y && (x = ab^{-1}y \text{ より}) \\
&= bb^{-1}y && (a^{-1}a = e \text{ より}) \\
&= y && (bb^{-1} = e \text{ より})
\end{aligned}
$$

定義の復習：$bH = \{bh \mid h \in H\}$

剰余類の要素数：証明 (続 1)

全射性の証明

- 任意の $y \in bH$ を考える
- すなわち，ある $h \in H$ が存在して，$y = bh$
- $x = ab^{-1}y$ とすると，$x = ab^{-1}bh = ah$ なので，$x \in aH$
- また，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ba^{-1}x && (f\text{ の定義}) \\
&= ba^{-1}ab^{-1}y && (x = ab^{-1}y\text{ より}) \\
&= bb^{-1}y && (a^{-1}a = e\text{ より}) \\
&= y && (bb^{-1} = e\text{ より})
\end{aligned}
$$

- したがって，f は全射である □

定義の復習：$bH = \{bh \mid h \in H\}$

剰余類の要素数：証明 (続 2)

単射性の証明

- $x, x' \in aH$ とし，$f(x) = f(x')$ であると仮定する

- したがって，$x = x'$

剰余類の要素数：証明 (続 2)

$\boxed{\text{単射性の証明}}$

- $x, x' \in aH$ とし，$f(x) = f(x')$ であると仮定する
- すなわち，ある $h, h' \in H$ に対して，$x = ah, x' = ah'$
- したがって，$x = x'$

剰余類の要素数：証明 (続 2)

単射性の証明

- $x, x' \in aH$ とし，$f(x) = f(x')$ であると仮定する
- すなわち，ある $h, h' \in H$ に対して，$x = ah, x' = ah'$
- このとき，$f(x) = ba^{-1}x = ba^{-1}ah = bh$

- したがって，$x = x'$

剰余類の要素数：証明 (続 2)

単射性の証明

- $x, x' \in aH$ とし，$f(x) = f(x')$ であると仮定する
- すなわち，ある $h, h' \in H$ に対して，$x = ah, x' = ah'$
- このとき，$f(x) = ba^{-1}x = ba^{-1}ah = bh$
- 同様に，$f(x') = ba^{-1}x' = ba^{-1}ah' = bh'$
- したがって，$x = x'$

剰余類の要素数：証明 (続 2)

単射性の証明

- $x, x' \in aH$ とし，$f(x) = f(x')$ であると仮定する
- すなわち，ある $h, h' \in H$ に対して，$x = ah, x' = ah'$
- このとき，$f(x) = ba^{-1}x = ba^{-1}ah = bh$
- 同様に，$f(x') = ba^{-1}x' = ba^{-1}ah' = bh'$
- 仮定より，$bh = bh'$
- したがって，$x = x'$

剰余類の要素数：証明 (続 2)

単射性の証明

- $x, x' \in aH$ とし，$f(x) = f(x')$ であると仮定する
- すなわち，ある $h, h' \in H$ に対して，$x = ah, x' = ah'$
- このとき，$f(x) = ba^{-1}x = ba^{-1}ah = bh$
- 同様に，$f(x') = ba^{-1}x' = ba^{-1}ah' = bh'$
- 仮定より，$bh = bh'$
- この両辺に左から b^{-1} をかけると，$h = h'$

- したがって，$x = x'$

剰余類の要素数：証明 (続 2)

単射性の証明

- $x, x' \in aH$ とし，$f(x) = f(x')$ であると仮定する
- すなわち，ある $h, h' \in H$ に対して，$x = ah, x' = ah'$
- このとき，$f(x) = ba^{-1}x = ba^{-1}ah = bh$
- 同様に，$f(x') = ba^{-1}x' = ba^{-1}ah' = bh'$
- 仮定より，$bh = bh'$
- この両辺に左から b^{-1} をかけると，$h = h'$
- この両辺に左から a をかけると，$ah = ah'$
- したがって，$x = x'$

剰余類の要素数：証明 (続 2)

単射性の証明

- $x, x' \in aH$ とし，$f(x) = f(x')$ であると仮定する
- すなわち，ある $h, h' \in H$ に対して，$x = ah, x' = ah'$
- このとき，$f(x) = ba^{-1}x = ba^{-1}ah = bh$
- 同様に，$f(x') = ba^{-1}x' = ba^{-1}ah' = bh'$
- 仮定より，$bh = bh'$
- この両辺に左から b^{-1} をかけると，$h = h'$
- この両辺に左から a をかけると，$ah = ah'$
- したがって，$x = x'$
- つまり，f は単射である □

以上より，f は全単射であり，$|aH| = |bH|$ となる □

ラグランジュの定理：証明

ラグランジュの定理

G：有限群
H：G の部分群 $\Rightarrow$ $|H|$ は $|G|$ の約数 ($|G|/|H|$ は整数)

証明：命題 1 より，G は H の剰余類によって分割できる

- すなわち，ある $a_1, \ldots, a_{r-1} \in G$ が存在して

$$G = H \cup a_1 H \cup \cdots \cup a_{r-1} H$$

と G を分割できる

ラグランジュの定理：証明

ラグランジュの定理

G：有限群
H：G の部分群 $\Rightarrow$ $|H|$ は $|G|$ の約数 ($|G|/|H|$ は整数)

証明：命題 1 より，G は H の剰余類によって分割できる

- すなわち，ある $a_1, \ldots, a_{r-1} \in G$ が存在して

$$G = H \cup a_1 H \cup \cdots \cup a_{r-1} H$$

  と G を分割できる

- したがって，$|G| = |H| + |a_1 H| + \cdots + |a_{r-1} H|$

ラグランジュの定理：証明

ラグランジュの定理

G：有限群
H：G の部分群 $\Rightarrow$ $|H|$ は $|G|$ の約数 ($|G|/|H|$ は整数)

証明：命題 1 より，G は H の剰余類によって分割できる

- すなわち，ある $a_1, \ldots, a_{r-1} \in G$ が存在して

$$G = H \cup a_1 H \cup \cdots \cup a_{r-1} H$$

と G を分割できる

- したがって，$|G| = |H| + |a_1 H| + \cdots + |a_{r-1} H|$
- 命題 2 より，$|H| = |a_1 H| = \cdots = |a_{r-1} H|$

ラグランジュの定理：証明

ラグランジュの定理

G：有限群
H：G の部分群 $\Rightarrow$ $|H|$ は $|G|$ の約数 ($|G|/|H|$ は整数)

証明：命題 1 より，G は H の剰余類によって分割できる

- すなわち，ある $a_1, \ldots, a_{r-1} \in G$ が存在して
$$G = H \cup a_1 H \cup \cdots \cup a_{r-1} H$$
と G を分割できる
- したがって，$|G| = |H| + |a_1 H| + \cdots + |a_{r-1} H|$
- 命題 2 より，$|H| = |a_1 H| = \cdots = |a_{r-1} H|$
- すなわち，$|G| = r|H|$ であり，$|G|/|H|$ は自然数 r $\square$

ラグランジュの定理：補足

ラグランジュの定理

G：有限群
H：G の部分群 $\Rightarrow$ $|H|$ は $|G|$ の約数 ($|G|/|H|$ は整数)

記法：剰余類による分割

$$G/H = \{gH \mid g \in G\}$$

先ほどの証明から得られる帰結

$$|G/H| = |G|/|H|$$

目次

群の作用と軌道

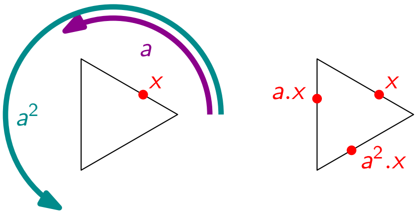
群 G が集合 X に作用

軌道とは？

要素 $x \in X$ の軌道とは,

$$G.x = \{g.x \mid g \in G\}$$

例：正三角形に作用する C_3 (回転)



群の作用と軌道

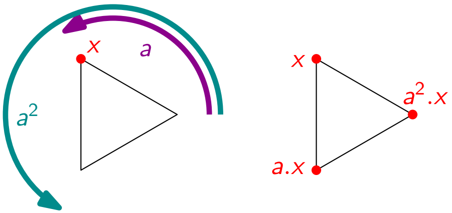
群 G が集合 X に作用

軌道とは？

要素 $x \in X$ の軌道とは,

$$G.x = \{g.x \mid g \in G\}$$

例：正三角形に作用する C_3 (回転)



群の作用と軌道

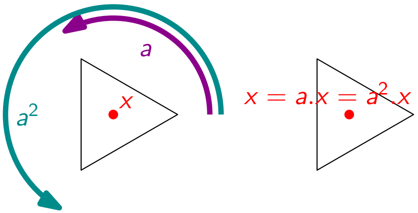
群 G が集合 X に作用

軌道とは？

要素 $x \in X$ の軌道とは，

$$G.x = \{g.x \mid g \in G\}$$

例：正三角形に作用する C_3 (回転)



群の作用と軌道

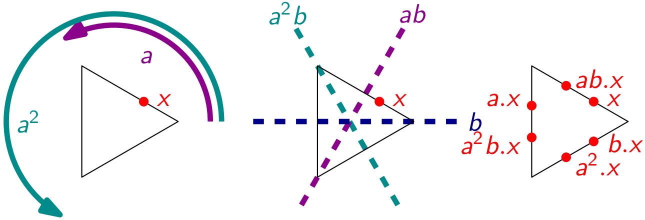
群 G が集合 X に作用

軌道とは？

要素 $x \in X$ の**軌道**とは,

$$G.x = \{g.x \mid g \in G\}$$

例：正三角形に作用する D_3 (回転・鏡映)



群の作用と軌道

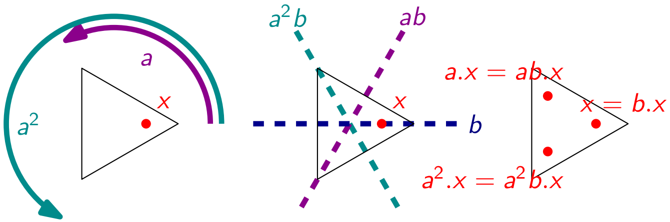
群 G が集合 X に作用

軌道とは？

要素 $x \in X$ の軌道とは,

$$G.x = \{g.x \mid g \in G\}$$

例：正三角形に作用する D_3 (回転・鏡映)



固定部分群

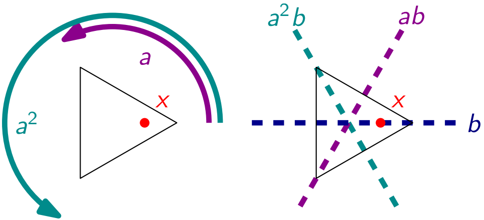
群 G が集合 X に作用

固定部分群とは？

要素 $x \in X$ の固定部分群 (または，安定化群) とは，

$$\mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid g.x = x\}$$

例：正三角形に作用する D_3 (回転・鏡映)



$$\mathrm{Stab}_G(x) = \{e, b\}$$

固定部分群は部分群

群 G が集合 X に作用

補題

任意の $x \in X$ に対して，固定部分群 $\mathrm{Stab}_G(x)$ は G の部分群

証明：任意の $a, b \in \mathrm{Stab}_G(x)$ に対して，$a^{-1}b \in \mathrm{Stab}_G(x)$ となることを示す (すなわち，$(a^{-1}b).x = x$ となることを示す)

- $a, b \in \mathrm{Stab}_G(x)$ とする
- したがって，$a^{-1}b \in \mathrm{Stab}_G(x)$ $\square$

固定部分群は部分群

群 G が集合 X に作用

補題

任意の $x \in X$ に対して，固定部分群 $\mathrm{Stab}_G(x)$ は G の部分群

証明：任意の $a, b \in \mathrm{Stab}_G(x)$ に対して，$a^{-1}b \in \mathrm{Stab}_G(x)$ となることを示す (すなわち，$(a^{-1}b).x = x$ となることを示す)

- $a, b \in \mathrm{Stab}_G(x)$ とする
- すなわち，$a.x = x$ かつ $b.x = x$
- したがって，$a^{-1}b \in \mathrm{Stab}_G(x)$ $\square$

固定部分群は部分群

群 G が集合 X に作用

補題

任意の $x \in X$ に対して，固定部分群 $\mathrm{Stab}_G(x)$ は G の部分群

<u>証明</u>：任意の $a, b \in \mathrm{Stab}_G(x)$ に対して，$a^{-1}b \in \mathrm{Stab}_G(x)$ となることを示す (すなわち，$(a^{-1}b).x = x$ となることを示す)

- $a, b \in \mathrm{Stab}_G(x)$ とする
- すなわち，$a.x = x$ かつ $b.x = x$
- 作用の定義より，$a^{-1}.x = a^{-1}.(a.x) \overset{*}{=} (a^{-1}a).x = e.x \overset{*}{=} x$
  ($*$ の等号で，作用の定義を用いた)
- したがって，$a^{-1}b \in \mathrm{Stab}_G(x)$ □

固定部分群は部分群

群 G が集合 X に作用

補題

任意の $x \in X$ に対して，固定部分群 $\mathrm{Stab}_G(x)$ は G の部分群

証明：任意の $a, b \in \mathrm{Stab}_G(x)$ に対して，$a^{-1}b \in \mathrm{Stab}_G(x)$ となることを示す (すなわち，$(a^{-1}b).x = x$ となることを示す)

- $a, b \in \mathrm{Stab}_G(x)$ とする
- すなわち，$a.x = x$ かつ $b.x = x$
- 作用の定義より，$a^{-1}.x = a^{-1}.(a.x) \overset{*}{=} (a^{-1}a).x = e.x \overset{*}{=} x$ ($*$ の等号で，作用の定義を用いた)
- このとき，作用の定義より，$(a^{-1}b).x \overset{*}{=} a^{-1}.(b.x) = a^{-1}.x = x$
- したがって，$a^{-1}b \in \mathrm{Stab}_G(x)$ □

軌道固定部分群定理

群 G が集合 X に作用

軌道固定部分群定理 (群作用の基本定理とも呼ばれる)

任意の $x \in X$ に対して，$|G/\mathrm{Stab}_G(x)| = |G.x|$

軌道固定部分群定理

群 G が集合 X に作用

軌道固定部分群定理 (群作用の基本定理とも呼ばれる)

任意の $x \in X$ に対して，$|G/\mathrm{Stab}_G(x)| = |G.x|$

ラグランジュの定理より，$|G|/|\mathrm{Stab}_G(x)| = |G/\mathrm{Stab}_G(x)|$ なので，

$$|G|/|\mathrm{Stab}_G(x)| = |G.x|$$

となり，すなわち，任意の $x \in X$ に対して

$$|G| = |G.x||\mathrm{Stab}_G(x)|$$

軌道固定部分群定理

群 G が集合 X に作用

軌道固定部分群定理 (群作用の基本定理とも呼ばれる)

任意の $x \in X$ に対して，$|G/\mathrm{Stab}_G(x)| = |G.x|$

ラグランジュの定理より，$|G|/|\mathrm{Stab}_G(x)| = |G/\mathrm{Stab}_G(x)|$ なので，

$$|G|/|\mathrm{Stab}_G(x)| = |G.x|$$

となり，すなわち，任意の $x \in X$ に対して

$$|G| = |G.x||\mathrm{Stab}_G(x)|$$

- 次回：証明
- 今回：とりあえず使い方の一例を見てみる

軌道固定部分群定理：使い方 (1)

例題 1

正 n 角形の回転対称性を表す群の位数は何か？

解答例：考える群を G とし，正 n 角形の 1 頂点を x とする

- このとき，$|G.x| = n$
- また，$\mathrm{Stab}_G(x) = \{e\}$ であるので，$|\mathrm{Stab}_G(x)| = 1$
- したがって，$|G| = |G.x||\mathrm{Stab}_G(x)| = n$ $\square$

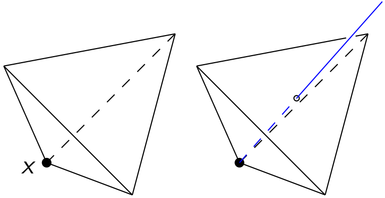
軌道固定部分群定理：使い方 (2)

例題 2

正四面体の回転対称性を表す群の位数は何か？

解答例：考える群を G とし，正四面体の 1 頂点を x とする

- G の作用により，x は正四面体の任意の頂点にうつるので，$|G.x| = 4$
- x を固定する G の作用は，x とその対面の中心を結ぶ直線の周りの回転のみなので，それは巡回群 C_3 の作用と同一視でき，$|\mathrm{Stab}_G(x)| = |C_3| = 3$
- したがって，$|G| = |G.x||\mathrm{Stab}_G(x)| = 4 \cdot 3 = 12$ □



目次

今日の目標と次回の予告

今日の目標

群の構造，特に部分群を深く理解する

- 部分群，剰余類
- ラグランジュの定理
- 軌道，固定部分群

次回の予告

次の 2 つの定理の証明

- 軌道固定部分群定理
- コーシー・フロベニウスの定理 (バーンサイドの補題)

$$|\{G.x \mid x \in X\}| = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}|\mathrm{Stab}_G(x)| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}_X(g)|$$

これを用いて「対称性を考慮した数え上げ」を行う

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次