離散数理工学 第 5 回
離散代数：群と対称性

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 11 月 11 日

最終更新：2014 年 11 月 11 日　11:22

スケジュール 前半 (予定)

1. 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/7)
- ⋆ 休講 (体育祭) (10/14)
2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/21)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/28)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/4)
5. 離散代数：群と対称性 (11/11)
6. 離散代数：部分群と軌道 (11/18)
7. 離散代数：対称性を考慮した数え上げ (11/25)

注意：予定の変更もありうる

8. 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/2)
9. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/9)
- ⋆ 中間試験 (12/16)
10. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/6)
11. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/13)
12. 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/20)
- ⋆ 休講 (海外出張) (1/27)
13. 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (2/3)
- ⋆ 期末試験 (2/17?)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

群を用いて物体の対称性を記述できるようになる

- 群の定義
- 群の表示
- 群の作用

「代数」といって思い浮かべるもの

- モノイド
- 半群
- 群
- 環
- 体

- 半束
- 束

自然の中の対称性：雪の結晶

http://www.its.caltech.edu/~atomic/snowcrystals/

自然の中の対称性：生物

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue_morpho_butterfly.jpg

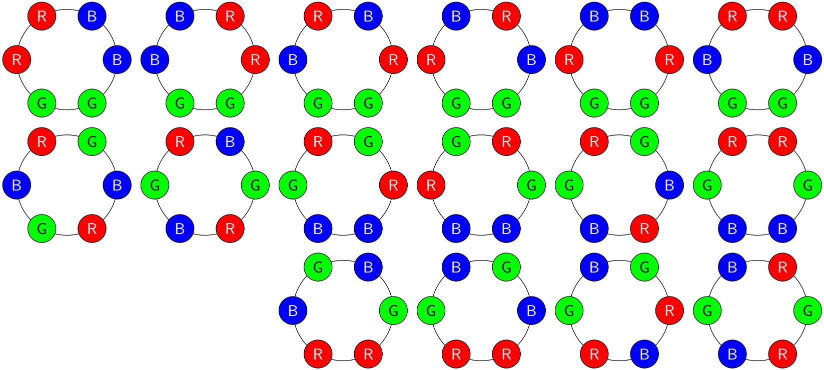
人工物の対称性：タージ・マハル

http://en.wikipedia.org/wiki/Taj_Mahal

問題

6 個の石を持つネックレスで，その石の色が
赤 2 つ，青 2 つ，緑 2 つのものの総数は何か？

ネックレス ＝ 回転して同じものは同じと見なす



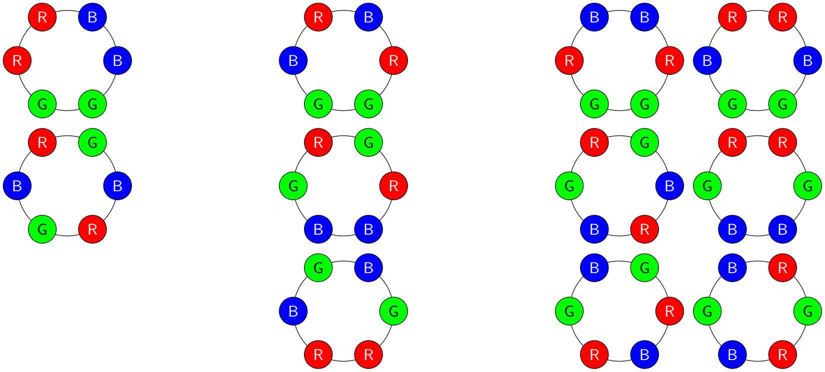
16

目標：異なるブレスレットの総数

問題

6 個の石を持つブレスレットで，その石の色が
赤 2 つ，青 2 つ，緑 2 つのものの総数は何か？

ブレスレット ＝ 回転や鏡映 (裏返し) によって同じものは同じと見なす



11

目次

群の例 (1)：整数と加法

整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は加法 $+$ に関して群となり，その群を $(\mathbb{Z}, +)$ と表す

群表 (ケイリー表とも呼ばれる)

$+$	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
$\vdots$											
-4	$\cdots$	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	$\cdots$
-3	$\cdots$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	$\cdots$
-2	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
-1	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
0	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
1	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
2	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
3	$\cdots$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
4	$\cdots$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$\vdots$											

群の構成要素

群は 2 つのものから定義される

- 集合 G
- G 上の演算 $\circ$
  - $x, y \in G$ に対する演算結果が $x \circ y$
  - 演算は他の記号 (例えば，$*$，$\cdot$，$\times$，$+$ など) で表すことも多い
  - $x \circ y$ を単に xy と書くことも多い ← 今後これを用いていることが多い

ただし，この G と $\circ$ は次の条件を満たす必要がある

この 2 つを組にして，$(G, \circ)$ と群を表記する
(「$\circ$」を省略して,「G」だけで表記する場合も多い)

群の定義

群とは？

集合 G と G 上の演算 $\circ$ の組 $(G, \circ)$ が群であるとは，次を満たすこと

1. ある要素 $e \in G$ が存在して，任意の $x \in G$ に対して
$$x \circ e = e \circ x = x$$
2. 任意の要素 $x \in G$ に対して，ある要素 $y \in G$ が存在して
$$x \circ y = y \circ x = e$$
3. 演算 $\circ$ は次の結合性を満たす：任意の $x, y, z \in G$ に対して
$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

群の例 (1)：整数と加法 — 1 つ目の条件

整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は加法 $+$ に関して群となり，その群を $(\mathbb{Z}, +)$ と表す

群表

$+$	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
$\vdots$											
-4	$\cdots$	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	$\cdots$
-3	$\cdots$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	$\cdots$
-2	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
-1	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
0	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
1	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
2	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
3	$\cdots$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
4	$\cdots$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$\vdots$											

群の例 (1)：整数と加法 — 2 つ目の条件

整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は加法 $+$ に関して群となり，その群を $(\mathbb{Z}, +)$ と表す

群表

$+$	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
$\vdots$											
-4	$\cdots$	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	$\cdots$
-3	$\cdots$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	$\cdots$
-2	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
-1	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
0	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
1	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
2	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
3	$\cdots$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
4	$\cdots$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$\vdots$											

群の定義：単位元と逆元

群とは？

集合 G と G 上の演算 $\circ$ の組 $(G, \circ)$ が群であるとは，次を満たすこと

1. ある要素 $e \in G$ が存在して，任意の $x \in G$ に対して
$$x \circ e = e \circ x = x$$
2. 任意の要素 $x \in G$ に対して，ある要素 $y \in G$ が存在して
$$x \circ y = y \circ x = e$$
3. 演算 $\circ$ は次の結合性を満たす：任意の $x, y, z \in G$ に対して
$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

群の定義：単位元と逆元

群とは？

集合 G と G 上の演算 $\circ$ の組 $(G, \circ)$ が群であるとは，次を満たすこと

1. ある要素 $e \in G$ が存在して，任意の $x \in G$ に対して

$$x \circ e = e \circ x = x$$

$\boxed{\text{この } e \text{ を } G \text{ の単位元と呼ぶ}}$

2. 任意の要素 $x \in G$ に対して，ある要素 $y \in G$ が存在して

$$x \circ y = y \circ x = e$$

3. 演算 $\circ$ は次の結合性を満たす：任意の $x, y, z \in G$ に対して

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

群の定義：単位元と逆元

群とは？

集合 G と G 上の演算 $\circ$ の組 $(G, \circ)$ が群であるとは，次を満たすこと

1. ある要素 $e \in G$ が存在して，任意の $x \in G$ に対して

$$x \circ e = e \circ x = x$$

この e を G の単位元と呼ぶ

2. 任意の要素 $x \in G$ に対して，ある要素 $y \in G$ が存在して

$$x \circ y = y \circ x = e$$

この y を G における x の逆元と呼び，x^{-1} で表すことが多い

3. 演算 $\circ$ は次の結合性を満たす：任意の $x, y, z \in G$ に対して

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

群ではない例

1. 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は乗法 $\times$ に関して群になる？
   - ならない (なぜ？)
2. 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は乗法 $\times$ に関して群になる？
   - ならない (なぜ？)
3. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は減算 $-$ に関して群になる？
   - ならない (なぜ？)

群の例 (2)

$G = \{x, y, z, w\}$

群表

$\circ$	x	y	z	w
x	x	y	z	w
y	y	z	w	x
z	z	w	x	y
w	w	x	y	z

この表は次の関係を表している

$$\begin{array}{llll} x \circ x = x, & x \circ y = y, & x \circ z = z, & x \circ w = w, \\ y \circ x = y, & y \circ y = z, & y \circ z = w, & y \circ w = x, \\ z \circ x = z, & z \circ y = w, & z \circ z = x, & z \circ w = y, \\ w \circ x = w, & w \circ y = x, & w \circ z = y, & w \circ w = z \end{array}$$

群の例 (2)

$G = \{x, y, z, w\}$

群表

$\circ$	x	y	z	w
x	x	y	z	w
y	y	z	w	x
z	z	w	x	y
w	w	x	y	z

これが群であるための条件を満たしていることを確認

- 単位元は？
- x の逆元は？ y の逆元は？ z の逆元は？ w の逆元は？
- 結合性は？ (例えば，$(y \circ w) \circ z \stackrel{?}{=} y \circ (w \circ z)$)

群の例 (3)

$G = \{x, y, z, w\}$

群表

$\circ$	x	y	z	w
x	x	y	z	w
y	y	x	w	z
z	z	w	x	y
w	w	z	y	x

この表は次の関係を表している

$$\begin{array}{llll} x \circ x = x, & x \circ y = y, & x \circ z = z, & x \circ w = w, \\ y \circ x = y, & y \circ y = x, & y \circ z = w, & y \circ w = z, \\ z \circ x = z, & z \circ y = w, & z \circ z = x, & z \circ w = y, \\ w \circ x = w, & w \circ y = z, & w \circ z = y, & w \circ w = x \end{array}$$

群の例 (3)

$G = \{x, y, z, w\}$

群表

$\circ$	x	y	z	w
x	x	y	z	w
y	y	x	w	z
z	z	w	x	y
w	w	z	y	x

これが群であるための条件を満たしていることを確認

- 単位元は？
- x の逆元は？ y の逆元は？ z の逆元は？ w の逆元は？
- 結合性は？ (例えば，$(y \circ w) \circ z \stackrel{?}{=} y \circ (w \circ z)$)

群の例 (4)

$G = \{e, a, b, x, y, z\}$

群表

$\circ$	e	a	b	x	y	z
e	e	a	b	x	y	z
a	a	x	y	e	z	b
b	b	z	e	y	x	a
x	x	e	z	a	b	y
y	y	b	a	z	e	x
z	z	y	x	b	a	e

この表は次の関係を表している

$$
\begin{array}{llllll}
e \circ e = e, & e \circ a = a, & e \circ b = b, & e \circ x = x, & e \circ y = y, & e \circ z = z, \\
a \circ e = a, & a \circ a = x, & a \circ b = y, & a \circ x = e, & a \circ y = z, & a \circ z = b, \\
b \circ e = b, & b \circ a = z, & b \circ b = e, & b \circ x = y, & b \circ y = x, & b \circ z = a, \\
x \circ e = x, & x \circ a = e, & x \circ b = z, & x \circ x = a, & x \circ y = b, & x \circ z = y, \\
y \circ e = y, & y \circ a = b, & y \circ b = a, & y \circ x = z, & y \circ y = e, & y \circ z = x, \\
z \circ e = z, & z \circ a = y, & z \circ b = x, & z \circ x = b, & z \circ y = a, & z \circ z = e
\end{array}
$$

群の例 (4)

$G = \{e, a, b, x, y, z\}$

群表

$\circ$	e	a	b	x	y	z
e	e	a	b	x	y	z
a	a	x	y	e	z	b
b	b	z	e	y	x	a
x	x	e	z	a	b	y
y	y	b	a	z	e	x
z	z	y	x	b	a	e

これが群であるための条件を満たしていることを確認

- 単位元は？
- G の各要素の逆元は？
- 結合性は？ (例えば，$(x \circ y) \circ z \stackrel{?}{=} x \circ (y \circ z)$)

注意：$a \circ y \neq y \circ a$ (可換性を満たさない)

アーベル群

アーベル群とは？

群 $(G, \circ)$ がアーベル群であるとは，次の性質を満たすこと

$$\text{任意の } x, y \in G \text{ に対して，} \quad x \circ y = y \circ x$$

この性質を可換性 (交換性) と呼ぶ

- アーベル群は可換群とも呼ばれる
- アーベル群ではない場合，群は非可換群と呼ばれる

有限群と位数

有限群とは？

群 $(G, \circ)$ が有限群であるとは，G の要素数が $|G|$ が有限であること

有限群の位数とは？

有限群 $(G, \circ)$ の位数とは，$|G|$ のこと

今までの例

- 例 (1)：有限群ではない (アーベル群)
- 例 (2)：有限群であり，位数は 4 (アーベル群)
- 例 (3)：有限群であり，位数は 4 (アーベル群)
- 例 (4)：有限群であり，位数は 6 (非可換群)

この講義の焦点は有限群

群の要素の表記法

群 $(G, \circ)$

- $x \circ y$ とは書かずに，xy と書くことが多い
- $x \circ x$ とは書かずに，x^2 と書くことが多い
- $(x \circ y) \circ z$ と $x \circ (y \circ z)$ は同じなので，
  これらを $x \circ y \circ z$ と書き，もっと省略して xyz と書くことが多い
- xxx とは書かずに，x^3 と書くことが多い
- x を n 個並べたものは x^n と書くことが多い
- x の逆元は x^{-1} と書くことが多い
- x^{-1} を n 個並べたものは x^{-n} と書くことが多い
- x^0 は単位元 e を表す

このとき，次の指数法則が成り立つ

観察

任意の $x \in G$ と任意の整数 n, m に対して，$x^n x^m = x^{n+m}$

練習問題

群 G

例題

任意の $x, y \in G$ に対して，$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$

証明：

- 逆元の定義より，$(xy)(xy)^{-1} = e$ (ただし，e は G の単位元)
- この式の両辺に左から x^{-1} をかけると

$$\begin{aligned} x^{-1}(xy)(xy)^{-1} &= x^{-1}e \\ (x^{-1}x)y(xy)^{-1} &= x^{-1} \\ y(xy)^{-1} &= x^{-1} \end{aligned}$$

- 今得られた式の両辺に左から y^{-1} をかけると

$$\begin{aligned} y^{-1}y(xy)^{-1} &= y^{-1}x^{-1} \\ \therefore \quad (xy)^{-1} &= y^{-1}x^{-1} \end{aligned}$$

□

目次

群の要素を作る

群 G

- $a \in G$ のとき，$a^2 \in G$，$a^3 \in G$，$a^4 \in G$，$\ldots$
- $a, b \in G$ のとき，$ab \in G$，$a^2b \in G$，$aba \in G$，$\ldots$

このように，要素を並べることで，G の要素がどんどん作れる

群の表示：例 (3) を見て

$G = \{x, y, z, w\}$

群表

$\circ$	x	y	z	w
x	x	y	z	w
y	y	x	w	z
z	z	w	x	y
w	w	z	y	x

- $yz = w$ が成り立つ
- つまり，y と z があれば，w は復元できる (w はある意味で不要)
- x は単位元 (e と書く)
- y は $y^2 = e$ を満たす
- z は $z^2 = e$ を満たす
- y と z は $yz = zy$ を満たす (書き換えると $z^{-1}yzy^{-1} = e$)

群の表示：例 (3) を見て

$G = \{e, a, b, ab\}$

群表

$\circ$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

別の書き方 (群の表示と呼ばれる)：

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = e, ab = ba \rangle$$

読み方

- 「a, b」を並べることで G の要素はすべて表現できる
- 並べたとき,「$a^2 = b^2 = e,\ ab = ba$」と置き換えてよい
- 置き換える規則は，これら (から導かれるもの) 以外にない

用語

- $\{a, b\}$ は G の生成系,「$a^2 = b^2 = e,\ ab = ba$」は関係式

群の表示：例 (3) を見て

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = e, ab = ba \rangle$$

簡約の例

$$\begin{aligned} ab^3a^3b &= abbbaaab \\ &= a(bb)b(aa)ab \\ &= aebeab \\ &= abab \\ &= a(ba)b \\ &= a(ab)b \\ &= aabb \\ &= ee \\ &= e \end{aligned}$$

群の表示：群の例 (2)

$G = \{x, y, z, w\}$

群表

$\circ$	x	y	z	w
x	x	y	z	w
y	y	z	w	x
z	z	w	x	y
w	w	x	y	z

関係式

- 単位元は x (e と書くことにする)
- $y^2 = z$，$y^3 = zy = w$ (y があれば，z と w は表現できる)
- $y^4 = wy = e$

群の表示：群の例 (2)

$G = \{e, a, a^2, a^3\}$

群表

$\circ$	e	a	a^2	a^3
e	e	a	a^2	a^3
a	a	a^2	a^3	e
a^2	a^2	a^3	e	a
a^3	a^3	e	a	a^2

群の表示

$$\langle a \mid a^4 = e \rangle$$

巡回群

(有限) 巡回群とは？

位数 n の巡回群とは，次の表示を持つ群　　$(n \geq 0$ は自然数$)$

$$C_n = \langle a \mid a^n = e \rangle$$

例 (2) は位数 4 の巡回群

注意

- $C_n = \{e, a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}\}$
- すなわち，C_n の位数は n
- C_n はアーベル群 (演習問題)
    - ヒント：C_n の任意の要素はある自然数 k を用いて a^k と書ける
- C_n は正 n 角形の回転対称性を表す群 (後述)

群の表示：群の例 (4)

$G = \{e, a, b, x, y, z\}$

群表

$\circ$	e	a	b	x	y	z
e	e	a	b	x	y	z
a	a	x	y	e	z	b
b	b	z	e	y	x	a
x	x	e	z	a	b	y
y	y	b	a	z	e	x
z	z	y	x	b	a	e

関係式

- $a^2 = x$， $ab = y$, $ba = z$ (a, b があれば，x, y, z は表現できる)
- $a^3 = e$, $b^2 = e$, $abab = e$

群の表示：群の例 (4)

$G = \{e, a, b, a^2, ab, ba\}$

群表

$\circ$	e	a	b	a^2	ab	ba
e	e	a	b	a^2	ab	ba
a	a	a^2	ab	e	ba	b
b	b	ba	e	ab	a^2	a
a^2	a^2	e	ba	a	b	ab
ab	ab	b	a	ba	e	a^2
ba	ba	ab	a^2	b	a	e

群の表示

$$G = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = abab = e \rangle$$

群の表示：群の例 (4)

群の表示

$$G = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = abab = e \rangle$$

簡約の例

$$\begin{aligned} aba &= ababb \\ &= (abab)b \\ &= eb \\ &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2ba^2b &= aabaab \\ &= aabaeab \\ &= aababbab \\ &= a(abab)bab \\ &= aebab \\ &= abab \\ &= e \end{aligned}$$

二面体群

(有限) 二面体群とは？

位数 $2n$ の二面体群とは，次の表示を持つ群　　($n \geq 0$ は自然数)

$$D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = abab = e \rangle$$

例 (4) は位数 6 の二面体群

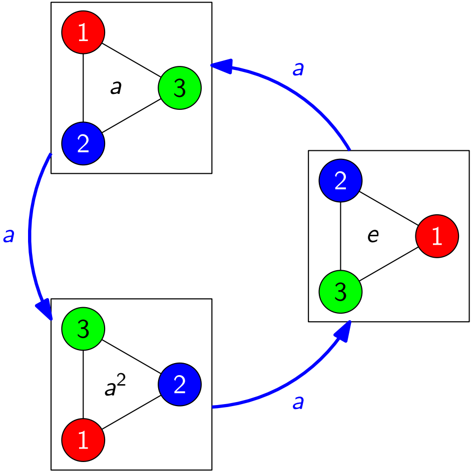
注意

- $D_n = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \ldots, a^{n-1}b\}$
- すなわち，D_n の位数は $2n$
- $n \geq 3$ のとき D_n は非可換群 (演習問題)
  - ヒント：ab と ba を考える
- D_n は正 n 角形の回転・鏡映対称性を表す群 (後述)

目次

正三角形の対称性：回転

$C_3 = \langle a \mid a^3 = e \rangle$ が正三角形の回転対称性を表す

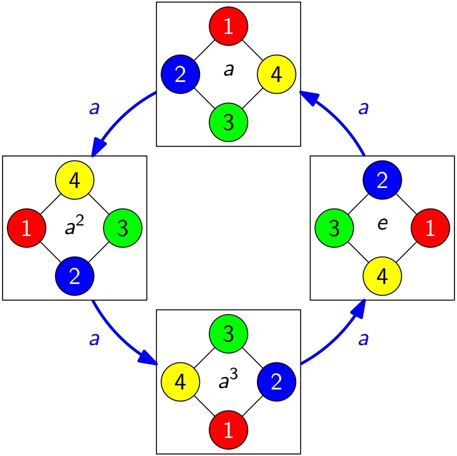


群の要素の捉え方

- 物体の状態
  - e：初期状態
  - a：120 度回転させた状態
  - a^2：240 度回転させた状態
- 物体への作用
  - e：そのままの状態で置く
  - a：120 度回転させる
  - a^2：240 度回転させる

正方形の対称性：回転

$C_4 = \langle a \mid a^4 = e \rangle$ が正方形の回転対称性を表す

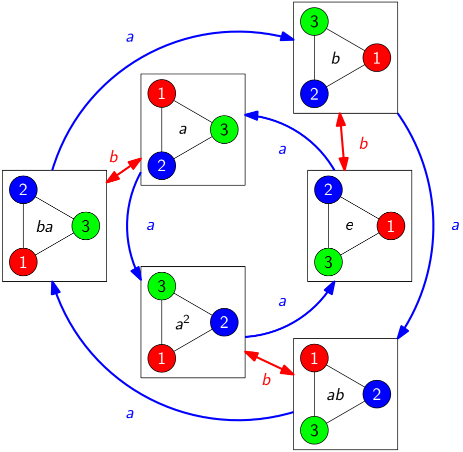


群の要素の捉え方

- 物体の状態
  - e：初期状態
  - a：90 度回転させた状態
  - a^2：180 度回転させた状態
  - a^3：270 度回転させた状態
- 物体への作用
  - e：そのままの状態で置く
  - a：90 度回転させる
  - a^2：180 度回転させる
  - a^3：270 度回転させる

正三角形の対称性：回転と鏡映

$D_3 = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = abab = e \rangle$ が正三角形の回転・鏡映対称性を表す

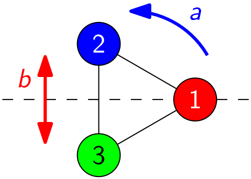


群の要素の捉え方

- 物体の状態
  - e：初期状態
  - a：120 度回転させた状態
  - b：x 軸に関して鏡映させた状態
  - ...
- 物体への作用
  - e：そのままの状態で置く
  - a：120 度回転させる
  - b：x 軸に関して鏡映させる
  - ...

正三角形の対称性：回転と鏡映

$D_3 = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = abab = e \rangle$ が正三角形の回転・鏡映対称性を表す



群の要素の捉え方

- 物体の状態
  - e：初期状態
  - a：120 度回転させた状態
  - b：x 軸に関して鏡映させた状態
  - ...
- 物体への作用
  - e：そのままの状態で置く
  - a：120 度回転させる
  - b：x 軸に関して鏡映させる
  - ...

群の作用：より一般的に書くと…

群 G，物体 X

- G の各要素 $g \in G$ を X が住む空間における変換であると見なす
- $g.x =$ その空間の点 x が g に対応する変換によって動いた先の点

群の作用とは？(直感的な定義)

G が X に作用するとは，次を満たすこと

- 任意の $g \in G$ と任意の $x \in X$ に対して，$g.x \in X$
- 任意の $g, h \in G$ と任意の $x \in X$ に対して，$h.(g.x) = (hg).x$
- 任意の $x \in X$ に対して，$e.x = x$

例：

- C_3 は正三角形に作用する，D_3 は正三角形に作用する
- C_4 は正方形に作用する，D_4 は正方形に作用する

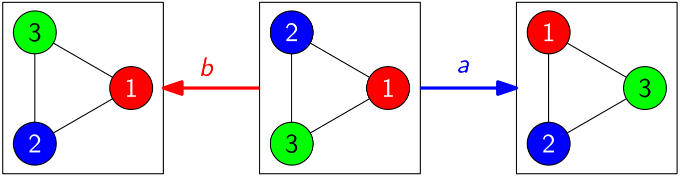
注意 (演習問題)：任意の $g \in G$ に対して，$x \mapsto g.x$ は X 上の全単射

作用することの確認法 (証明法)

1. 生成系の各要素 (生成元) が定める操作を定義する
2. 考える物体がその操作により不変であることを確認する
3. 各関係式が操作に対しても成り立つことを確認する

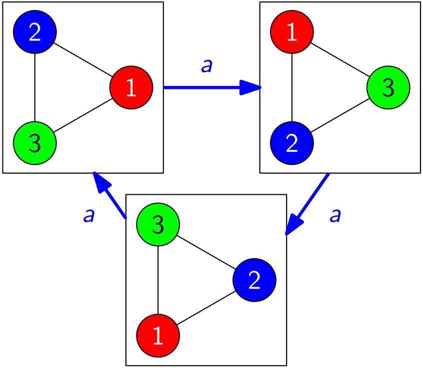
例：$D_3 = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = abab = e \rangle$ は正三角形に作用する

- 原点が正三角形の中心で，x 軸の正側に 1 頂点が置かれるとする
- a を原点中心反時計回りに 120 度回転する操作に対応させる
- b を x 軸に関して鏡映する操作に対応させる
- これら 2 つの操作により，正三角形は正三角形にうつる

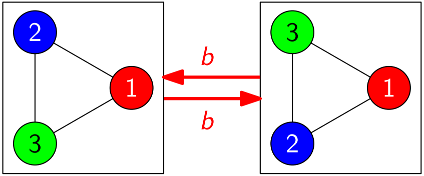


作用することの確認法 (証明法)：続き

$a^3 = e$ が成り立つことの確認

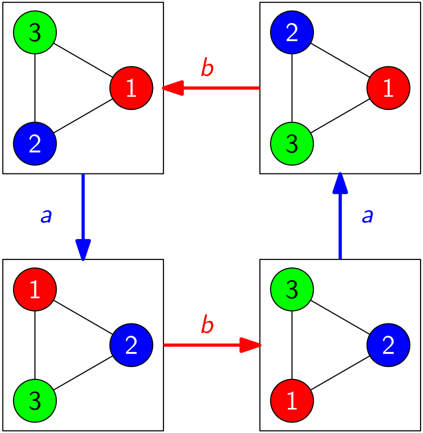


$b^2 = e$ が成り立つことの確認



作用することの確認法 (証明法)：続き 2

$abab = e$ が成り立つことの確認



以上の議論より，D_3 が正三角形に作用することが分かった

目次

今日の目標と次回の予告

今日の目標

群を用いて物体の対称性を記述できるようになる

- 群の定義
- 群の表示
- 群の作用

次回の予告

対称性を用いた数え上げを行うための道具の準備

- 部分群，剰余群
- 軌道，固定部分群

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次