離散数理工学 第 4 回
数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 11 月 4 日

最終更新：2014 年 11 月 21 日　10:02

スケジュール 前半 (予定)

1. 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/7)
- ⋆ 休講 (体育祭) (10/14)
2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/21)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/28)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/4)
5. 離散代数：群と対称性 (11/11)
6. 離散代数：部分群と軌道 (11/18)
7. 離散代数：対称性を考慮した数え上げ (11/25)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/2)
9. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/9)

★ 中間試験 (12/16)

10. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/6)
11. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/13)
12. 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/20)

★ 休講 (海外出張) (1/27)

13. 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (2/3)

★ 期末試験 (2/17?)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる

- 線形漸化式の解法
- カタラン数

目次

数列の母関数

母関数とは？

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ の母関数とは冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

のこと (x は複素数)

仮定

この冪級数は収束する

- 特に，ある定数 $r > 0$ が存在して $|x| < r$ のとき収束するとする
- つまり，$|x| < r$ のとき，$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は well-defined

収束するので，微分積分学や複素関数論の知識が使える

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 1$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 1$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 1$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 2^n$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 1$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 2^n$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 1$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 2^n$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$$

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 1$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 2^n$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$$

一般に，$a_n = \alpha^n$ で定められる数列の母関数は $\dfrac{1}{1-\alpha x}$

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = n$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n =$$

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = n$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n$$

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = n$ とすると，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n \\ &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n\end{aligned}$$

例 2

数列 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . . の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = n$ とすると，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n \\ &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = n$ とすると，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n \\
&= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

例 3

数列 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, . . . の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 3n + 1$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3n+1) x^n$$

例 3

数列 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, . . . の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 3n + 1$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3n+1)x^n = 3\sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

例 3

数列 $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 3n + 1$ とすると，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)x^n = 3\sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

例 3

数列 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ... の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 3n + 1$ とすると，

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (3n+1)x^n = 3\sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{2x+1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

目次

道 — まとめ　(第 2 回講義より)

$a_n =$ グラフ P_n における独立集合の総数　とする

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

- 特性方程式を用いた方法 (前回)
- 行列を用いた方法 (前回)
- 母関数を用いた方法 (今回)

便宜上，$a_0 = 1$ とする
(このとき，$n \geq 2$ に対して，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ が成立)

母関数を用いた漸化式の解法

1. 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

母関数を用いた漸化式の解法

1. 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_n x^n &= a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n \end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

1. 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\
a_n x^n &= a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n \\
\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n
\end{aligned}
$$

母関数を用いた漸化式の解法

1. 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_n x^n &= a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n \\ \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \end{aligned}$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x$$

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - 2x\end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
\text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - 2x \\
\text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}
\end{aligned}
$$

母関数を用いた漸化式の解法

2. 各辺を $A(x)$ によって表す

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
\text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - 2x \\
\text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\
&= x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0\right) + x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)
\end{aligned}
$$

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
\text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - 2x \\
\text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\
&= x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0\right) + x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \\
&= xA(x) - x + x^2 A(x)
\end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

3. 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$A(x) - 1 - 2x = xA(x) - x + x^2 A(x)$$

母関数を用いた漸化式の解法

3. 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$
\begin{aligned}
A(x) - 1 - 2x &= xA(x) - x + x^2A(x) \\
(x^2 + x - 1)A(x) &= -x - 1
\end{aligned}
$$

母関数を用いた漸化式の解法

3. 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 - 2x &= xA(x) - x + x^2A(x) \\ (x^2 + x - 1)A(x) &= -x - 1 \\ A(x) &= -\frac{x+1}{x^2+x-1} \end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

3. 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = -\frac{x+1}{x^2+x-1}$$

母関数を用いた漸化式の解法

3. 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = -\frac{x+1}{x^2+x-1}$$

このとき，$-\dfrac{x+1}{x^2+x-1}$ の部分分数分解が必要

- 「分母 $=0$」を x について解くと，$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ となる
- したがって，ある定数 a, b が存在して

$$-\frac{x+1}{x^2+x-1} = \frac{a}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

- この a, b を定める (次のページ)

母関数を用いた漸化式の解法

$$-\frac{x+1}{x^2+x-1} = \frac{a}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

母関数を用いた漸化式の解法

$$
\begin{aligned}
-\frac{x+1}{x^2+x-1} &= \frac{a}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{b}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\
-(x+1) &= a\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)+b\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

母関数を用いた漸化式の解法

$$
\begin{aligned}
-\frac{x+1}{x^2+x-1} &= \frac{a}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\
-(x+1) &= a\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\
-x-1 &= (a+b)x + \left(-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}b\right)
\end{aligned}
$$

母関数を用いた漸化式の解法

$$
\begin{aligned}
-\frac{x+1}{x^2+x-1} &= \frac{a}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\
-(x+1) &= a\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\
-x-1 &= (a+b)x + \left(-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}b\right)
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
-1 &= a+b, \quad \text{かつ} \\
-1 &= -\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}b
\end{aligned}
$$

母関数を用いた漸化式の解法

$$
\begin{aligned}
-\frac{x+1}{x^2+x-1} &= \frac{a}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\
-(x+1) &= a\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\
-x-1 &= (a+b)x + \left(-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}b\right)
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
-1 &= a+b, \quad \text{かつ} \\
-1 &= -\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}b
\end{aligned}
$$

これを a, b に関して解くと

$$
a = \frac{-5-\sqrt{5}}{10}, \quad b = \frac{-5+\sqrt{5}}{10}
$$

母関数を用いた漸化式の解法

したがって，

$$A(x) = -\frac{x+1}{x^2+x-1} = -\frac{5+\sqrt{5}}{10}\frac{1}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{5-\sqrt{5}}{10}\frac{1}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

母関数を用いた漸化式の解法

したがって,

$$
\begin{aligned}
A(x) &= -\frac{x+1}{x^2+x-1} = -\frac{5+\sqrt{5}}{10}\frac{1}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{5-\sqrt{5}}{10}\frac{1}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\
&= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x}
\end{aligned}
$$

母関数を用いた漸化式の解法

したがって，

$$\begin{aligned}
A(x) &= -\frac{x+1}{x^2+x-1} = -\frac{5+\sqrt{5}}{10}\frac{1}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{5-\sqrt{5}}{10}\frac{1}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\
&= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x} \\
&= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n x^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n x^n
\end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

したがって，

$$
\begin{aligned}
A(x) &= -\frac{x+1}{x^2+x-1} = -\frac{5+\sqrt{5}}{10}\frac{1}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{5-\sqrt{5}}{10}\frac{1}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\
&= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x} \\
&= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n x^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right)x^n
\end{aligned}
$$

母関数を用いた漸化式の解法

したがって，

$$
\begin{aligned}
A(x) &= -\frac{x+1}{x^2+x-1} = -\frac{5+\sqrt{5}}{10}\frac{1}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{5-\sqrt{5}}{10}\frac{1}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\
&= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x} \\
&= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n x^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right)x^n
\end{aligned}
$$

したがって，任意の $n \geq 0$ に対して，

$$
a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n
$$

目次

カタラン数

カタラン数とは？

次の漸化式で定められる数 C_n を第 n カタラン数と呼ぶ

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例：

- $C_1 = C_0 C_0 = 1 \cdot 1 = 1$
- $C_2 = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$
- $C_3 = C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$
- $C_4 = C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$

目標：第 n カタラン数を表す式を母関数による方法で導く

カタラン数：母関数による解法

1. 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$$

カタラン数：母関数による解法

1. 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$$
\begin{aligned}
C_n &= \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \\
C_n x^n &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \right) x^n
\end{aligned}
$$

カタラン数：母関数による解法

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$$
\begin{aligned}
C_n &= \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \\
C_n x^n &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \right) x^n \\
&= x \sum_{i=0}^{n-1} (C_i C_{n-i-1} x^{n-1})
\end{aligned}
$$

カタラン数：母関数による解法

1. 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$$
\begin{aligned}
C_n &= \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \\
C_n x^n &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}\right) x^n \\
&= x \sum_{i=0}^{n-1} (C_i C_{n-i-1} x^{n-1}) \\
\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(x \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \right)
\end{aligned}
$$

カタラン数：母関数による解法

1. 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$$
\begin{aligned}
C_n &= \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \\
C_n x^n &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \right) x^n \\
&= x \sum_{i=0}^{n-1} (C_i C_{n-i-1} x^{n-1}) \\
\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(x \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \right)
\end{aligned}
$$

母関数を $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ と書くことにする

カタラン数：母関数による解法

2 各辺を $C(x)$ によって表す

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n - C_0 = C(x) - 1 \\
\text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(x \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \right) \\
&= x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \\
&= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} x^{n}
\end{aligned}
$$

カタラン数：母関数による解法

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} x^n \\
&= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n
\end{aligned}
$$

カタラン数：母関数による解法

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} x^n \\
&= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n \\
&= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j}
\end{aligned}
$$

カタラン数：母関数による解法

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} x^n \\
&= x\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n \\
&= x\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j} \\
&= x\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_i x^i C_j x^j
\end{aligned}
$$

カタラン数：母関数による解法

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} x^n \\
&= x\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n \\
&= x\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j} \\
&= x\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_i x^i C_j x^j \\
&= x\left(\sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j x^j\right)
\end{aligned}
$$

カタラン数：母関数による解法

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} x^n \\
&= x\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n \\
&= x\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j} \\
&= x\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_i x^i C_j x^j \\
&= x\left(\sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j x^j\right) = xC(x)^2
\end{aligned}
$$

カタラン数：母関数による解法

3. 得られた式を $C(x)$ に関して解く

$$C(x) - 1 = xC(x)^2$$

カタラン数：母関数による解法

3. 得られた式を $C(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} C(x) - 1 &= xC(x)^2 \\ xC(x)^2 - C(x) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

カタラン数：母関数による解法

3. 得られた式を $C(x)$ に関して解く

$$
\begin{aligned}
C(x) - 1 &= xC(x)^2 \\
xC(x)^2 - C(x) + 1 &= 0 \\
C(x) &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}
\end{aligned}
$$

どちらが正しいのか？

カタラン数：母関数による解法

ここで，$\lim_{x \to 0} C(x) = C_0 = 1$ なので，

- $C(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ だとすると，

- $C(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ だとすると，

カタラン数：母関数による解法

ここで，$\lim_{x \to 0} C(x) = C_0 = 1$ なので，

- $C(x) = \dfrac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x}$ だとすると，
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x} = \infty$$
となり，合わない
- $C(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ だとすると，

カタラン数：母関数による解法

ここで，$\lim_{x \to 0} C(x) = C_0 = 1$ なので，

- $C(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ だとすると，

$$\lim_{x \to 0} \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \infty$$

  となり，合わない

- $C(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ だとすると，

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1-(1-4x)}{2x(1+\sqrt{1-4x})} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{1+\sqrt{1-4x}} = 1$$

  となり，合う

カタラン数：母関数による解法

ここで，$\lim_{x \to 0} C(x) = C_0 = 1$ なので，

- $C(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ だとすると，

$$\lim_{x \to 0} \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \infty$$

となり，合わない

- $C(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ だとすると，

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1-(1-4x)}{2x(1+\sqrt{1-4x})} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{1+\sqrt{1-4x}} = 1$$

となり，合う

したがって，$C(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ である

母関数を用いた漸化式の解法

3. 得られた $C(x)$ の級数展開を導く

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

母関数を用いた漸化式の解法

3. 得られた $C(x)$ の級数展開を導く

$$
\begin{aligned}
C(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \\
xC(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}
\end{aligned}
$$

母関数を用いた漸化式の解法

3. 得られた $C(x)$ の級数展開を導く

$$
\begin{aligned}
C(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \\
xC(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}
\end{aligned}
$$

ここで，$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ なので，

$$
xC(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^n
$$

つまり，$xC(x)$ は次の数列 $\{a_n\}$ の母関数

$$
a_n = \begin{cases} 0 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ C_{n-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}
$$

まずは，$xC(x)$ の級数展開を導く

母関数を用いた漸化式の解法

補題 (テイラー展開を使うことで証明できる (証明は省略))

任意の実数 α に対して，$|x| < 1$ であるとき，

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

ただし，

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

すなわち，

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n$$

母関数を用いた漸化式の解法

$$\begin{aligned}
\therefore \quad xC(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^n\right)x^n
\end{aligned}$$

したがって，

$$\text{任意の } n \geq 1 \text{ に対して} \quad C_{n-1} = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^n$$

整理

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^n &= -\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-4)^n \\
&= -\frac{1}{2}\frac{-2(-2+4)(-2+8)\cdots(-2+4n-4)}{n!} \\
&= \frac{2\cdot 6\cdot \cdots \cdot (4n-6)}{n!} = \frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-3)}{n!}2^{n-1} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-3)}{n!}2^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-1)!} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-3)}{n!}2^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot (n-1)}{(n-1)!} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-3)}{n!}\frac{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot (2n-2)}{(n-1)!} \\
&= \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}
\end{aligned}
$$

まとめ

以上の議論より，任意の $n \geq 1$ に対して，

$$C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

つまり，次の公式が得られる

カタラン数の公式

任意の $n \geq 0$ に対して

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

カタラン数の上界と下界

カタラン数の公式

任意の $n \geq 0$ に対して

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

二項係数：簡単な評価 (復習)

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

したがって，カタラン数に対する以下の上界と下界が得られる

$$\frac{2^n}{n+1} \leq C_n \leq \frac{(2e)^n}{n+1}$$

$\therefore$ カタラン数は指数関数的に増加する

目次

カタラン数の組合せ的解釈

リチャード・スタンレイ

- MIT 数学科の教授
- 組合せ論の研究者 (大家)
- カタラン数の組合せ的解釈を 207 個収集した (書籍出版予定)

ここでは 2 つだけ紹介

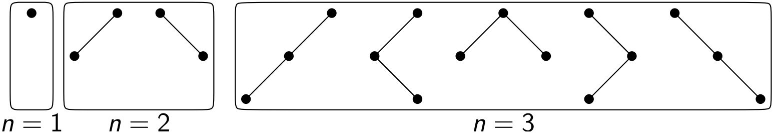
http://en.wikipedia.org/wiki/Richard_P._Stanley

カタラン数の組合せ的解釈：二分木

二分木とは？

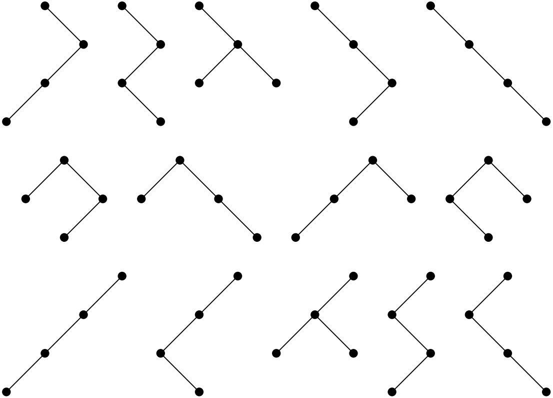
頂点数 n の二分木とは，次のように再帰的に定義されるグラフ

- 頂点数 0 の二分木は空グラフ (頂点を持たないグラフ)
- 頂点数 1 の二分木は根と呼ばれる 1 頂点から成るグラフ
- 頂点数 $n \geq 2$ の二分木は，根 r と呼ばれる 1 頂点と，左部分木，右部分木と呼ばれる 2 つの二分木から成り，頂点数の総和は n であり，r と左部分木の根，r と右部分木の根を辺で結んだもの



カタラン数の組合せ的解釈：二分木

$n = 4$ のとき



目標

頂点数 n の二分木の総数 T_n の満たす漸化式を導く

カタラン数の組合せ的解釈：二分木の総数が満たす漸化式

T_n が満たす漸化式

$$T_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} T_i T_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

証明：$n \geq 1$ のとき，

- 左部分木の頂点数 $+$ 右部分木の頂点数 $= n - 1$
- 左部分木の頂点数を i とすると，$i \in \{0, \ldots, n-1\}$ で，右部分木の頂点数は $n - i - 1$
- このとき，左部分木は T_i 通り，右部分木は T_{n-i-1} 通りの可能性 □

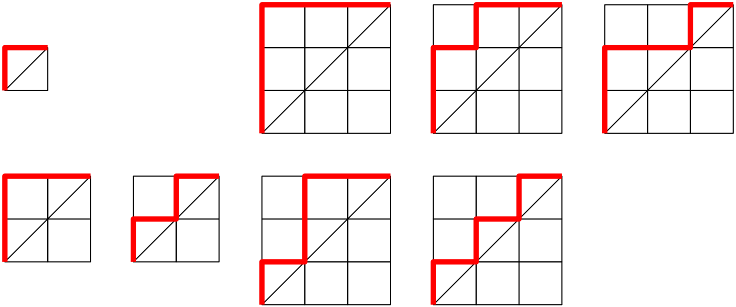
結論

頂点数 n の二分木の総数は第 n カタラン数 C_n と等しい

カタラン数の組合せ的解釈：ダイク道

ダイク道とは？

ダイク道とは，$(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道で，
直線 $y=x$ の下側を通らないもの



$$D_n = (0,0) \text{ から } (n,n) \text{ へ至るダイク道の総数}$$

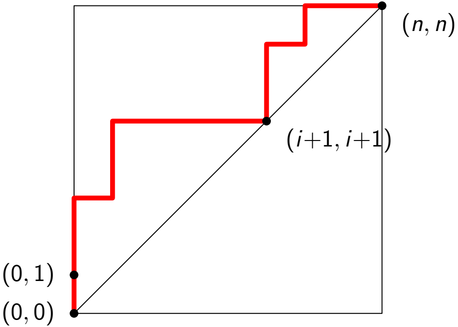
カタラン数の組合せ的解釈：ダイク道の総数が満たす漸化式

ダイク道の総数が満たす漸化式

$$D_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} D_i D_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

証明：$n \geq 1$ のとき

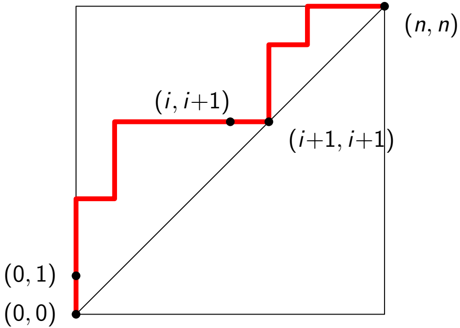
- 「はじめの一歩」は必ず「上」
- $(0,0)$ の他に，はじめて直線 $y = x$ 上に来るときを考える
- その点を $(i+1, i+1)$ とする ($i \in \{0, \ldots, n-1\}$)



カタラン数の組合せ的解釈：ダイク道の総数が満たす漸化式

証明 (続き)：

- $(i+1, i+1)$ に来る直前に，必ず $(i, i+1)$ にいる
- つまり，考えているダイク道は以下の形をしている
  1. $(0,0)$ から $(0,1)$ に至る　($\leftarrow$ 1 通り)
  2. $(0,1)$ から $(i, i+1)$ に至る
  3. $(i, i+1)$ から $(i+1, i+1)$ に至る　($\leftarrow$ 1 通り)
  4. $(i+1, i+1)$ から (n, n) に至る



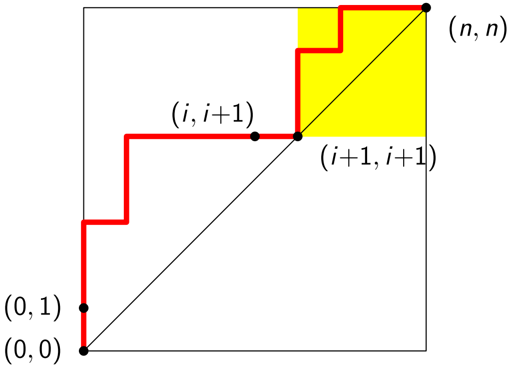
カタラン数の組合せ的解釈：ダイク道の総数が満たす漸化式

証明 (続き)：

4 $(i+1, i+1)$ から (n, n) に至る

この間に $y = x$ より下に行かないので,

このような経路の総数	$=$	$(0,0)$ から $(n-i-1, n-i-1)$ に至るダイク道の総数	$=$	D_{n-i-1}



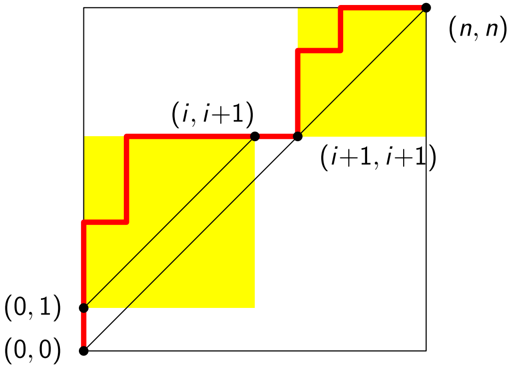
カタラン数の組合せ的解釈：ダイク道の総数が満たす漸化式

証明 (続き)：

2 $(0,1)$ から $(i, i+1)$ に至る

この間に $y = x$ 上に来ないので,

$$\boxed{\text{このような経路の総数}} = \boxed{(0,0) \text{ から } (i,i) \text{ に至るダイク道の総数}} = \boxed{D_i}$$



カタラン数の組合せ的解釈：ダイク道の総数が満たす漸化式

証明 (続き)：

- $(i+1, i+1)$ に来る直前に，必ず $(i, i+1)$ にいる
- つまり，考えているダイク道は以下の形をしている
  1. $(0,0)$ から $(0,1)$ に至る　($\leftarrow 1$ 通り)
  2. $(0,1)$ から $(i, i+1)$ に至る　($\leftarrow D_i$ 通り)
  3. $(i, i+1)$ から $(i+1, i+1)$ に至る　($\leftarrow 1$ 通り)
  4. $(i+1, i+1)$ から (n, n) に至る　($\leftarrow D_{n-i-1}$ 通り)

したがって，$D_n = \sum_{i=0}^{n-1} D_i D_{n-i-1}$ □

結論

$(0,0)$ から (n, n) へ至るダイク道の総数は第 n カタラン数 C_n に等しい

目次

今日の目標

今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる

- 線形漸化式の解法
- カタラン数

注意

今日扱ったのは，母関数に関する初歩

- 母関数にまつわる理論は膨大
- 近年では「解析的組合せ論」という分野に成長

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次