離散数理工学 第 1 回
数え上げの基礎：二項係数と二項定理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 10 月 7 日

最終更新：2014 年 10 月 7 日　11:28

概要

主題

次の 3 つを道具として
離散システム／アルゴリズムの設計と解析に関する方法論を学習する

- 数え上げ組合せ論
- 代数系
- 離散確率論

キャッチフレーズ：「離散数学を使う」

達成目標：以下の 3 項目をすべて達成することを目標とする

1. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における用語を正しく使うことができる
2. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における典型的な論法を用いて，証明を行うことができる
3. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論を用いて，離散システム／アルゴリズムの設計と解析ができる

概要

主題

次の 3 つを道具として
離散システム／アルゴリズムの設計と解析に関する方法論を学習する

- 数え上げ組合せ論
- 代数系
- 離散確率論

キャッチフレーズ：「離散数学を使う」

達成目標：以下の 3 項目をすべて達成することを目標とする

1. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における用語を正しく使うことができる
2. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における典型的な論法を用いて，証明を行うことができる
3. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論を用いて，離散システム／アルゴリズムの設計と解析ができる

論理的思考

離散数学系科目の流れ

離散数学	論理的思考 (質的)
↓	
グラフとネットワーク	
↓	
離散数理工学	論理的思考 (量的)

質的な論理的思考→量的な論理的思考

質的な論理的思考：典型的な命題

次は正しいか？ (答えは Yes か No)

0 以上 100 以下のすべての整数 x に対して，
ある整数 y が存在して，$x = y^2$ となる

量的な論理的思考：典型的な命題

次は正しいか？ (答えは数量)

0 以上 100 以下の整数 x で，
ある整数 y が存在して，$x = y^2$ となるものの個数は？

量的な論理的思考はややこしい

例 1：次は正しいか？

すべての日本人 x に対して

$$\Pr[x \text{ がじゃんけんでグーを出す}] = 0$$

例 2：次は正しいか？

$$\Pr\left[\begin{array}{l}\text{すべての日本人が} \\ \text{じゃんけんでグーを出す}\end{array}\right] = 0$$

量的な論理的思考はややこしい

例 1：次は正しいか？

すべての日本人 x に対して

$$\mathrm{Pr}[x\ \text{がじゃんけんでグーを出す}] = 0$$

例 2：次は正しいか？

$$\mathrm{Pr}\left[\begin{array}{l}\text{すべての日本人が}\\ \text{じゃんけんでグーを出す}\end{array}\right] = 0$$

例 3：次は正しいか？

すべての日本人 x に対して

$$\mathrm{Pr}[x\ \text{がじゃんけんでグーを出す}] > \mathrm{Pr}\left[\begin{array}{l}\text{すべての日本人が}\\ \text{じゃんけんでグーを出す}\end{array}\right]$$

量的な論理的思考はややこしい：モンティ・ホール問題

モンティ・ホール問題：設定

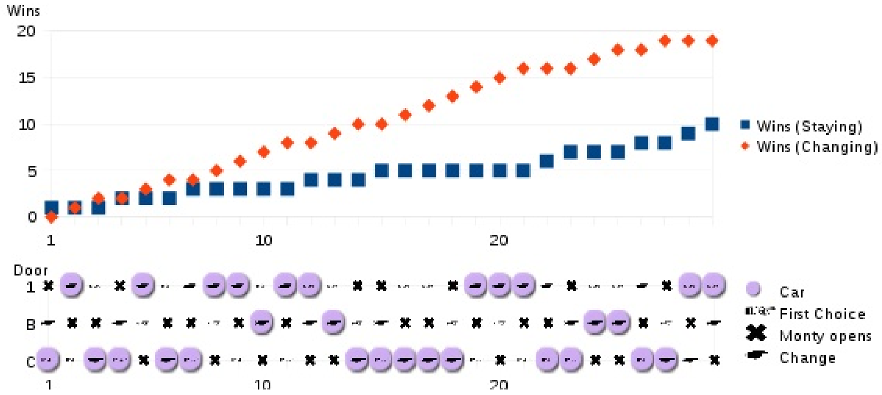
- プレイヤーの前に 3 つの扉
  - 1 つの扉の後ろ：景品の新車
  - 2 つの扉の後ろ：はずれを意味するヤギ
- プレイヤーが 1 つの扉を選択した後，司会者が残りの扉のうちヤギがいる扉を開けてヤギを見せる
- プレイヤーは，最初に選んだ扉を残っている開けられていない扉に変更してもよいと言われる

モンティ・ホール問題：問題

プレイヤーは扉を変更すべきだろうか？

量的な論理的思考はややこしい：モンティ・ホール問題

シミュレーション $\rightsquigarrow$ 「変更すべき」のよう？



http://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem

スケジュール 前半 (予定)

1. 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/7)

★ 休講 (体育祭) (10/14)

2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/21)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/28)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/4)
5. 離散代数：群と対称性 (11/11)
6. 離散代数：部分群と軌道 (11/18)
7. 離散代数：対称性を考慮した数え上げ (11/25)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/2)
9. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/9)

★ 中間試験 (12/16)

10. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/6)
11. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/13)
12. 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/20)

★ 休講 (海外出張) (1/27)

13. 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (2/3)

★ 期末試験 (2/17?)

注意：予定の変更もありうる

情報

教員

- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

ティーチング・アシスタント

- 後田多 太一 (しいただ たいち)
- 居室：西 4 号館 2 階 202 号室 (岡本研究室)

講義資料

- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2014/dme/
- 注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う
- 講義前日の夕方 16 時までに，ここに置かれる
- Twitter (@okamoto7yoshio)：置かれたことを知らせる tweet

講義資料

http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2014/dme/

- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- 演習問題
- 用語集

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

授業の進め方

講義 (75 分)

- スライドと板書で進める
- スライドのコピーに重要事項のメモを取る

演習 (15 分)

- 演習問題に取り組む
- 不明な点は教員に質問する

退室 (0 分) ←重要

- コメント (授業の感想，質問など) を紙に書いて提出する (匿名可)
- コメントとそれに対する回答は (匿名で) 講義ページに掲載される

オフィスアワー：金曜 5 限 (岡本居室か CED)

- 質問など
- ただし，いないときもあるので注意

演習問題

演習問題の進め方

- 授業の最後 15 分は演習問題を解く時間
- 残った演習問題は復習・試験対策用
- 注意：「模範解答」のようなものは存在しない

演習問題の種類

- 復習問題：講義で取り上げた内容を反復
- 補足問題：講義で省略した内容を補足
- 追加問題：講義の内容に追加

解答の提出

- 演習問題の答案をレポートとして提出してもよい (すること推奨)
- レポートを提出するならば，期限内に提出しないといけない (再提出は原則期限なし)
- レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- レポートはコメントが付けられて，返却される

評価

中間試験と期末試験のみによる

- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
  - その中の 2 題は演習問題として提示されたものと同一である (複数の演習問題が組み合わされて 1 題とされる可能性もある) (「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 15 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分 (おそらく)
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

成績評価

- $\min\{100, \text{中間試験の素点} + \text{期末試験の素点}\}$ による

格言

格言 (三省堂 大辞林)

短い言葉で、人生の真理や処世術などを述べ、教えや戒めとした言葉。「石の上にも三年」「沈黙は金」など。金言。

格言 (この講義における)

講義内容とは直接関係ないかもしれないが，
私 (岡本) が重要だと思うこと

格言 (の例)

単位取得への最短の道のりは，授業に出て，演習問題を解くこと

教科書・参考書

教科書

- 指定しない

全般的な参考書

- J. マトウシェク，J. ネシェトリル (著)，根上生也，中本敦浩 (訳)，「離散数学への招待 (上・下)」，丸善出版，2002.
- 浅野孝夫,「情報数学」，コロナ社，2009.
- 小島定吉,「離散構造」，朝倉書店，2013.
- 玉木久夫,「情報科学のための確率入門」，サイエンス社，2002.
- 伏見正則,「確率と確率過程」，朝倉書店，2004.
- など

この講義の約束

- 私語はしない (ただし，演習時間の相談は積極的に OK)
- 携帯電話はマナーモードにする
- この講義と関係のないことを (主に電子機器で) しない
- 音を立てて睡眠しない

約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

履修上の注意

履修上の注意 1

『離散数理工学』は

- 2012 年よりも前に入学した情報・通信工学科 (I 科) の学生にとって『シミュレーション理工学第二』

なので，シミュレーション理工学第二を履修済みの学生は
離散数理工学を履修できない

履修上の注意 2

離散確率論の基礎は前提知識

- 高校の「場合の数」,「確率」,「確率分布」に関する知識は要復習 (特に,「期待値」と「条件付き確率」)

今日の目標

今日の目標

次の 2 つの数を扱えるようになる

- 階乗，二項係数

扱えるとは？

- 漸近公式と簡単な上界，下界
- 二項定理
- 組合せ的解釈

目次

階乗

階乗とは？

自然数 n の階乗とは，次で定義される自然数のこと

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1$$

例：

- $0! = 1$
- $1! = 1$
- $2! = 2$
- $3! = 6$
- $4! = 24$
- ...

組合せ的解釈

階乗の組合せ的解釈

$n! =$ 区別できる n 個のものを 1 列に並べる方法の総数

$n = 4$ のとき，$n! = 24$

- 1 2 3 4
- 2 1 3 4
- 3 1 2 4
- 4 1 2 3
- 1 2 4 3
- 2 1 4 3
- 3 1 4 2
- 4 1 3 2
- 1 3 2 4
- 2 3 1 4
- 3 2 1 4
- 4 2 1 3
- 1 3 4 2
- 2 3 4 1
- 3 2 4 1
- 4 2 3 1
- 1 4 2 3
- 2 4 1 3
- 3 4 1 2
- 4 3 1 2
- 1 4 3 2
- 2 4 3 1
- 3 4 2 1
- 4 3 2 1

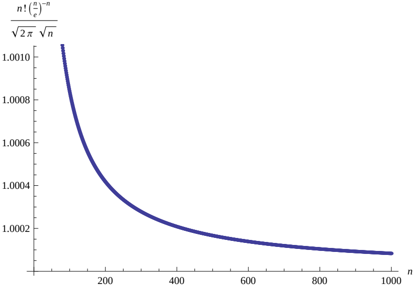
階乗：漸近公式

Stirling の公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

特に，

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$



$\leftarrow \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$ のプロット

『複素関数論』を使えば
(割と簡単に) 証明できるが，
ここでは行わない

階乗：上界と下界 (かかい)

実用上，次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法 (下界は演習問題)

[基底段階] $n = 1$ のとき

階乗：上界と下界 (かかい)

実用上，次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法　　(下界は演習問題)

[基底段階]　$n = 1$ のとき

- $n! = 1! = 1$

階乗：上界と下界 (かかい)

実用上，次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法 (下界は演習問題)

[基底段階] $n = 1$ のとき

- $n! = 1! = 1$
- $en\left(\frac{n}{e}\right)^n = e \cdot 1\left(\frac{1}{e}\right)^1 = 1$

階乗：上界と下界 (かかい)

実用上，次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法　　(下界は演習問題)

[基底段階]　$n = 1$ のとき

- $n! = 1! = 1$
- $en\left(\frac{n}{e}\right)^n = e \cdot 1 \left(\frac{1}{e}\right)^1 = 1$
- したがって，$n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n$ となる

階乗：上界と下界

階乗：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法

[帰納段階] 自然数 $k \geq 1$ に対して $k! \leq ek\left(\frac{k}{e}\right)^k$ となると仮定

階乗：上界と下界

階乗：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法

[帰納段階] 自然数 $k \geq 1$ に対して $k! \leq ek\left(\frac{k}{e}\right)^k$ となると仮定

証明すること (目標)

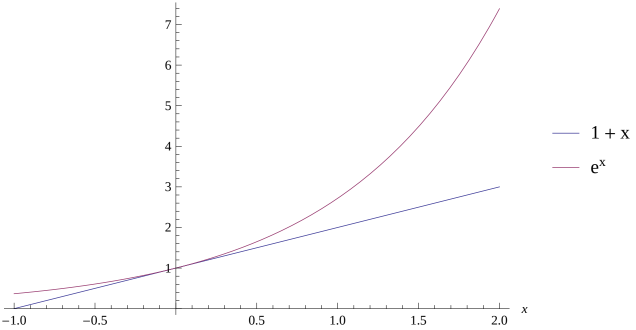
$$(k+1)! \leq e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^k$$

有用な不等式

事実：有用な不等式 (演習問題)

任意の実数 x に対して

$$1 + x \leq e^x$$



階乗：上界と下界

$$(k+1)! = (k+1)\cdot k!$$

階乗：上界と下界

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\leq (k+1)\cdot ek\left(\frac{k}{e}\right)^k \qquad \text{(帰納法の仮定)}
\end{aligned}
$$

階乗：上界と下界

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\le (k+1)\cdot ek\left(\frac{k}{e}\right)^{k} \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= e\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}
\end{aligned}
$$

階乗：上界と下界

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\le (k+1)\cdot ek\left(\frac{k}{e}\right)^{k} \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= e\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e\left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}
\end{aligned}
$$

階乗：上界と下界

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\le (k+1)\cdot ek\left(\frac{k}{e}\right)^{k} \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= e\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e\left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}
\end{aligned}
$$

階乗：上界と下界

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\leq (k+1)\cdot ek\left(\frac{k}{e}\right)^{k} \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= e\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e\left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&\leq e\left(e^{-\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1}\cdot e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}
\end{aligned}
$$

階乗：上界と下界

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\le (k+1)\cdot ek\left(\frac{k}{e}\right)^{k} \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= e\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e\left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&\le e\left(e^{-\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1}\cdot e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e\cdot\left(e^{-1}\right)\cdot e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}
\end{aligned}
$$

階乗：上界と下界

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\le (k+1)\cdot ek\left(\frac{k}{e}\right)^{k} \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= e\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e\left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&\le e\left(e^{-\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1}\cdot e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \\
&= e\cdot(e^{-1})\cdot e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} = e(k+1)\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}
\end{aligned}
$$

□

目次

二項係数

二項係数とは？

自然数 a, b で $a \geq b$ を満たすものに対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

- $\binom{a}{b}$ は「a choose b」と読む (のが普通)
- 「${}_a\mathrm{C}_b$」という記号を高校では使うが，離散数学では使わない

組合せ的解釈 (1)：部分集合

二項係数の組合せ的解釈 (1)

$\binom{a}{b}$ = 要素数 a の集合における，要素数 b の部分集合の総数

$a = 5,\ b = 2$ のとき：$\{1,2,3,4,5\}$ の部分集合で要素数 2 のもの

$$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{1,5\},\ \{2,3\},$$
$$\{2,4\},\ \{2,5\},\ \{3,4\},\ \{3,5\},\ \{4,5\}$$

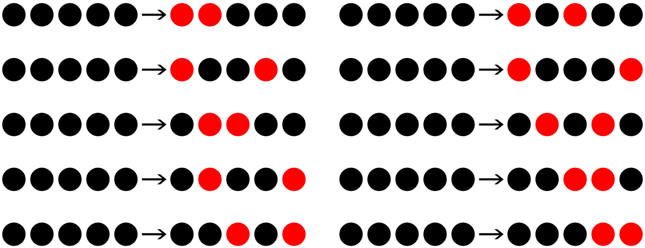
$\binom{5}{2} = 10$

組合せ的解釈 (2)：着色

二項係数の組合せ的解釈 (2)

$\binom{a}{b}$ = 区別できる a 個のものの中から b 個に色を塗る方法の総数

$a = 5,\ b = 2$ のとき



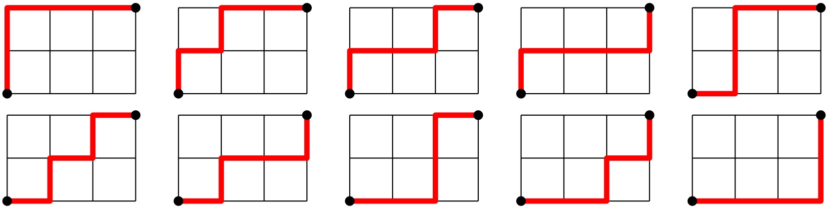
$$\binom{5}{2} = 10$$

組合せ的解釈 (3)：格子道

二項係数の組合せ的解釈 (3)

$\binom{a}{b}$ = (0, 0) から (a − b, b) に至る (単調な) 格子道の総数

$a = 5,\ b = 2$ のとき：$(0, 0)$ から $(3, 2)$ に至る格子道



$$\binom{5}{2} = 10$$

二項係数：上界と下界

二項係数：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

上界の証明：演習問題

- ヒント：まず，$\binom{a}{b} \leq \frac{a^b}{b!}$ を証明する
- ヒント：階乗に対する下界を使う

二項係数：上界と下界

二項係数：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

下界の証明：

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

二項係数：上界と下界

二項係数：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

下界の証明：

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a-1}{b-1} \cdot \cdots \cdot \frac{a-b+1}{1}$$

二項係数：上界と下界

二項係数：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

<u>下界の証明</u>：

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a-1}{b-1} \cdot \cdots \cdot \frac{a-b+1}{1} \geq \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{b}$$

<u>注</u>：$a \geq b \geq k$ のとき，$(a-k)b \geq a(b-k)$

二項係数：上界と下界

二項係数：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

下界の証明：

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a-1}{b-1} \cdot \cdots \cdot \frac{a-b+1}{1} \geq \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^b \quad \square$$

注：$a \geq b \geq k$ のとき，$(a-k)b \geq a(b-k)$

二項係数に関する恒等式：対称性

二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

二項係数に関する恒等式：対称性

二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a!}{(a-b)!(a-(a-b))!}$$

二項係数に関する恒等式：対称性

二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a!}{(a-b)!(a-(a-b))!} = \binom{a}{a-b} \qquad \square$$

二項係数に関する恒等式：対称性 — 組合せ的解釈：着色

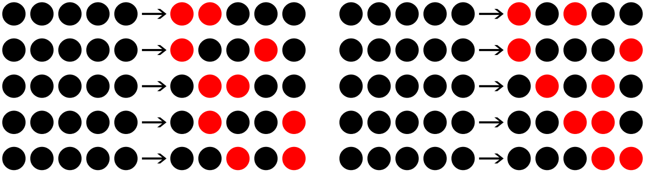
二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

- 左辺 $=$ a 個のものの中から色を塗る b 個を選ぶ
- 右辺 $=$ a 個のものの中から色を塗らない $a-b$ 個を選ぶ

$a = 5,\ b = 2$ のとき



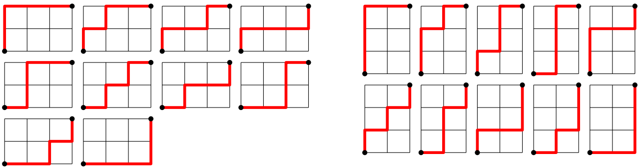
二項係数に関する恒等式：対称性 — 組合せ的解釈：格子道

二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

- 左辺 $=$ $(0,0)$ から $(a-b, b)$ へ至る格子道の総数
- 右辺 $=$ $(0,0)$ から $(b, a-b)$ へ至る格子道の総数



直線 $y = x$ に関してこの 2 つは対称なので，等式が成り立つ

二項係数に関する恒等式：Pascal の三角形

Pascal の三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a - 1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

二項係数に関する恒等式：Pascal の三角形

Pascal の三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} \quad = \quad \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!}$$

二項係数に関する恒等式：Pascal の三角形

Pascal の三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a - 1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned}\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!}\end{aligned}$$

二項係数に関する恒等式：Pascal の三角形

Pascal の三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a - 1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned}\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!}\end{aligned}$$

二項係数に関する恒等式：Pascal の三角形

Pascal の三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned}
\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!} \\
&= \frac{(a-1)!b}{b(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)(a-b-1)!}
\end{aligned}$$

二項係数に関する恒等式：Pascal の三角形

Pascal の三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned}
\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!} \\
&= \frac{(a-1)!b}{b(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)(a-b-1)!} \\
&= \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!}
\end{aligned}$$

二項係数に関する恒等式：Pascal の三角形 (証明の続き)

Pascal の三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \cdots = \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!}$$

$\square$

二項係数に関する恒等式：Pascal の三角形 (証明の続き)

Pascal の三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned}\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \cdots &= \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!}\end{aligned}$$

$\square$

二項係数に関する恒等式：Pascal の三角形 (証明の続き)

Pascal の三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned}
\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \cdots &= \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!a}{b!(a-b)!}
\end{aligned}$$

$\square$

二項係数に関する恒等式：Pascal の三角形 (証明の続き)

Pascal の三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned}\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \cdots &= \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!a}{b!(a-b)!} = \frac{a!}{b!(a-b)!}\end{aligned}$$

□

二項係数に関する恒等式：Pascal の三角形 (証明の続き)

Pascal の三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned}
\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \cdots &= \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!a}{b!(a-b)!} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \binom{a}{b} \qquad \square
\end{aligned}$$

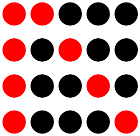
二項係数に関する恒等式：Pascal の三角形 — 組合せ的解釈：着色

Pascal の三角形

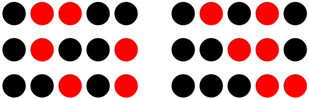
任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

- 最初のものを塗る場合だけ見ると，$\binom{a-1}{b-1}$ 通り
- 最初のものを塗らない場合だけ見ると，$\binom{a-1}{b}$ 通り



$$\binom{4}{1} = 4$$



$$\binom{4}{2} = 6$$

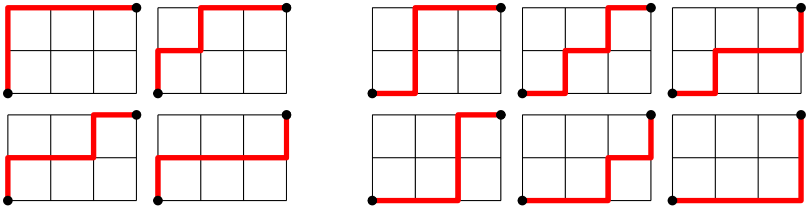
二項係数に関する恒等式：Pascal の三角形 — 組合せ的解釈：格子道

Pascal の三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

- 最初に上へ行く道だけ見ると，$\binom{a-1}{b-1}$ 通り
- 最初に右へ行く道だけ見ると，$\binom{a-1}{b}$ 通り



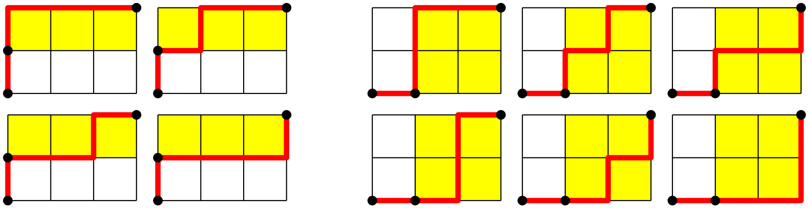
二項係数に関する恒等式：Pascal の三角形 — 組合せ的解釈：格子道

Pascal の三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

- 最初に上へ行く道だけ見ると，$\binom{a-1}{b-1}$ 通り
- 最初に右へ行く道だけ見ると，$\binom{a-1}{b}$ 通り



Pascal の三角形

$$
\begin{array}{cccccccc}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7}
\end{array}
$$

Pascal の三角形

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

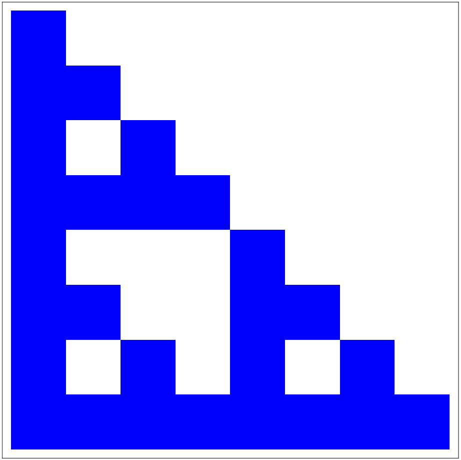
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

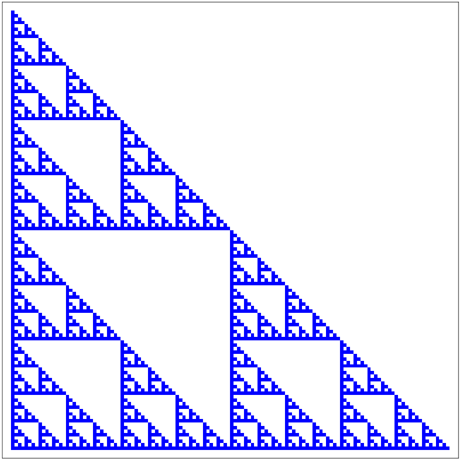
$$\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}$$

Pascal の三角形



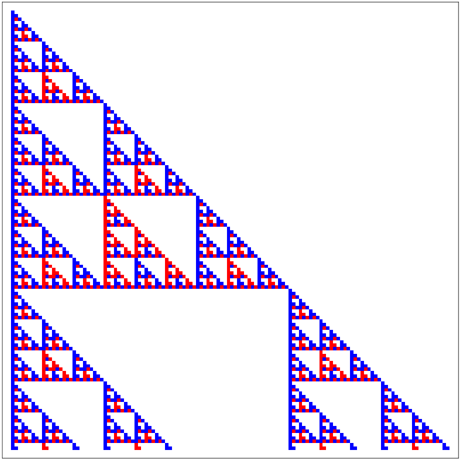
mod 2 による色付け

Pascal の三角形



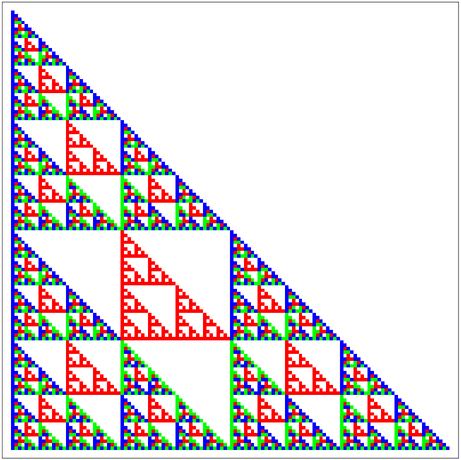
mod 2 による色付け

Pascal の三角形



mod 3 による色付け

Pascal の三角形



mod 4 による色付け

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1} = \frac{a}{b}\frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!}$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1} = \frac{a}{b}\frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1} = \frac{a}{b}\frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \binom{a}{b} \qquad \square$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

a 個のものの中から b–1 個に赤を塗り，1 個に青を塗る

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$b\binom{a}{b} = a\binom{a-1}{b-1}$$

a 個のものの中から b–1 個に赤を塗り，1 個に青を塗る

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

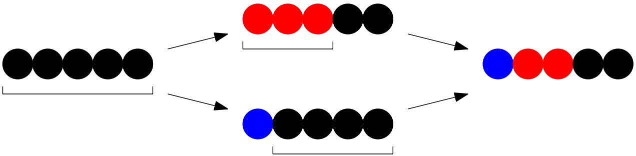
吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$b\binom{a}{b} = a\binom{a-1}{b-1}$$

a 個のものの中から b–1 個に赤を塗り，1 個に青を塗る

- 左辺 $=$ a 個のものの中から b 個に赤を塗り，
  その b 個の中から 1 個に青を塗る
- 右辺 $=$ a 個のものの中から 1 個に青を塗り，
  残り a–1 個の中から b–1 個に赤を塗る



目次

二項定理

二項定理

任意の複素数 x, y と任意の自然数 $n \geq 0$ に対して,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

証明：演習問題

- ヒント：n に関する数学的帰納法 + Pascal の三角形

二項定理の応用 (1)

例題 1

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

証明：二項定理の式において，$x = y = 1$ とすると

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \square$$

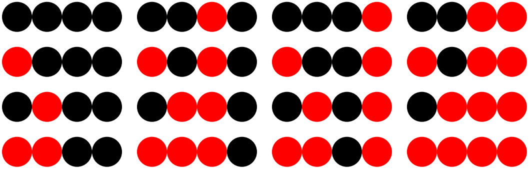
例題 1：組合せ的解釈 (着色)

例題 1

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

- 右辺 $=$ a 個のものの中からいくつかに色を塗る方法の総数
- 左辺の第 k 項 $=$ a 個のものの中から k 個に色を塗る方法の総数



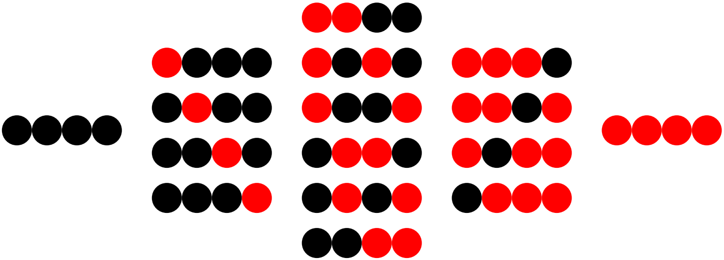
例題 1：組合せ的解釈 (着色)

例題 1

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

- 右辺 $=$ a 個のものの中からいくつかに色を塗る方法の総数
- 左辺の第 k 項 $=$ a 個のものの中から k 個に色を塗る方法の総数



二項定理の応用 (2)

例題 2

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$$

二項定理の応用 (2)

例題 2

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$$

証明：二項定理の式において，$x = -1, y = 1$ とすると

$$0 = (-1+1)^n$$

二項定理の応用 (2)

例題 2

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

証明：二項定理の式において，$x = -1, y = 1$ とすると

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k}$$

二項定理の応用 (2)

例題 2

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$$

証明：二項定理の式において，$x = -1, y = 1$ とすると

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k \qquad \square$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明：二項定理より

$$(x+1)^{2n}$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明：二項定理より

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k}$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明：二項定理より

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明：二項定理より

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

特に，$(x+1)^{2n}$ における x^n の係数は $\binom{2n}{n}$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方,

$$(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n$$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方，

$$(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n \quad = \quad \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) \left(\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^\ell\right)$$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方，

$$
\begin{aligned}
(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}x^\ell\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{\ell}x^{k+\ell}
\end{aligned}
$$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方，

$$(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}x^\ell\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{\ell}x^{k+\ell}$$

つまり，この式における x^n の係数は

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方，

$$
\begin{aligned}
(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}x^\ell\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{\ell}x^{k+\ell}
\end{aligned}
$$

つまり，この式における x^n の係数は

$$
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k}
$$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方，

$$
\begin{aligned}
(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}x^\ell\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{\ell}x^{k+\ell}
\end{aligned}
$$

つまり，この式における x^n の係数は

$$
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2
$$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方，

$$
\begin{aligned}
(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}x^\ell\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{\ell}x^{k+\ell}
\end{aligned}
$$

つまり，この式における x^n の係数は

$$
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2
$$

したがって，

$$
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}
$$

□

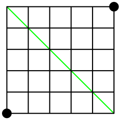
例題 3：組合せ的解釈 (格子道)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

右辺 $= (0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の総数



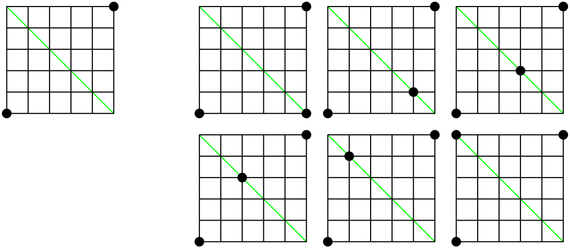
例題 3：組合せ的解釈 (格子道)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

左辺の第 k 項 $=$ $(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の中で，
$(k, n-k)$ を通るものの総数



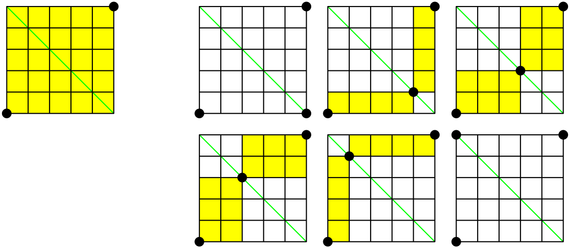
例題 3：組合せ的解釈 (格子道)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

左辺の第 k 項 $=$ $(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の中で，
$(k, n-k)$ を通るものの総数



目次

この講義の概要

主題

次の 3 つを道具として
離散システム／アルゴリズムの設計と解析に関する方法論を学習する

- 数え上げ組合せ論
- 代数系
- 離散確率論

キャッチフレーズ：「離散数学を使う」

達成目標：以下の 3 項目をすべて達成することを目標とする

1. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における用語を正しく使うことができる
2. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における典型的な論法を用いて，証明を行うことができる
3. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論を用いて，離散システム／アルゴリズムの設計と解析ができる

今日の目標

今日の目標

次の 2 つの数を扱えるようになる

- 階乗，二項係数

扱えるとは？

- 漸近公式と簡単な上界，下界
- 二項定理
- 組合せ的解釈

格言

組合せの等式は，組合せ的解釈で直感的に理解

格言

漸近公式は難しいが，簡単な上界・下界で足りる場合も多い

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次