

スケジュール 後半 (予定)

- 8 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/2)
- 9 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/9)
 - ★ 中間試験 (12/16)
- 10 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/6)
- 11 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/13)
- 12 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/20)
 - ★ 休講 (海外出張) (1/27)
 - 13 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (2/3)
 - ★ 期末試験 (2/17?)

注意：予定の変更もありうる

考えたいこと

時間発展とともに変動する事象を確率によってモデル化および解析

例：株価



<http://stocks.finance.yahoo.co.jp>

マルコフ連鎖：例

目次

- 1 マルコフ連鎖：例
- 2 マルコフ連鎖：定義と表現
- 3 チャップマン・コルモゴロフ方程式
- 4 マルコフ連鎖の定常分布
- 5 今日のまとめ

スケジュール 前半 (予定)

- 1 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/7)
 - ★ 休講 (体育祭) (10/14)
- 2 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/21)
- 3 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/28)
- 4 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/4)
- 5 離散代数：群と対称性 (11/11)
- 6 離散代数：部分群と軌道 (11/18)
- 7 離散代数：対称性を考慮した数え上げ (11/25)

今日の目標

今日の目標

マルコフ連鎖について以下ができるようになる

- ▶ 推移行列と状態遷移図を用いてマルコフ連鎖が表現できる
- ▶ チャップマン・コルモゴロフ方程式を用いて、マルコフ連鎖における時間発展を表現できる
- ▶ 定常分布をマルコフ連鎖の極限と正しく関連付けられる

この講義で扱うマルコフ連鎖は

「斉時 離散時間 有限状態 マルコフ連鎖」と呼ばれるもの

考えたいこと

時間発展とともに変動する事象を確率によってモデル化および解析

例：天気



<http://weather.yahoo.co.jp/weather/>

マルコフ連鎖：例

マルコフ連鎖：例

次の状況を考える

- ▶ ある街の天気は「晴れ (F)」, 「曇り (C)」, 「雨 (R)」のいずれか
- ▶ 天気は毎日、確率的に変わる
 - ▶ 晴れの日の翌日の天気が晴れである確率 = 1/2
 - ▶ 晴れの日の翌日の天気が曇りである確率 = 1/3
 - ▶ 晴れの日の翌日の天気が雨である確率 = 1/6
 - ▶ 曇りの日の翌日の天気が晴れである確率 = 1/3
 - ▶ 曇りの日の翌日の天気が曇りである確率 = 1/3
 - ▶ 曇りの日の翌日の天気が雨である確率 = 1/3
 - ▶ 雨の日の翌日の天気が晴れである確率 = 1/4
 - ▶ 雨の日の翌日の天気が曇りである確率 = 1/2
 - ▶ 雨の日の翌日の天気が雨である確率 = 1/4
- ▶ **問**：今日が雨であるとき、2日後も雨である確率はどれだけか？

ポイント

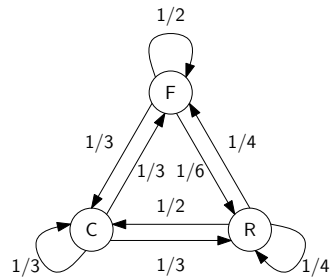
次の日の天気 (に関する確率) は、前の日の天気だけから決まる

見にくいので、行列で表現する

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} F & C & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} F \\ C \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

「行」から「列」へ推移する

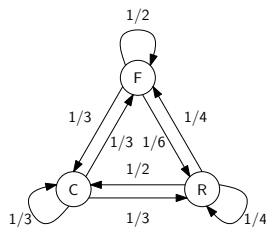
見にくいので、状態遷移図で表現する



「始点」から「終点」へ推移する

計算したい確率は $\Pr(2 \text{ 日後が雨} \mid \text{今日が雨})$

$$\begin{aligned} & \Pr(2 \text{ 日後が雨} \mid \text{今日が雨}) \\ &= \Pr(2 \text{ 日後が雨} \mid 1 \text{ 日後が晴れ}) \Pr(1 \text{ 日後が晴れ} \mid \text{今日が雨}) \\ & \quad + \Pr(2 \text{ 日後が雨} \mid 1 \text{ 日後が曇り}) \Pr(1 \text{ 日後が曇り} \mid \text{今日が雨}) \\ & \quad + \Pr(2 \text{ 日後が雨} \mid 1 \text{ 日後が雨}) \Pr(1 \text{ 日後が雨} \mid \text{今日が雨}) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{13}{48} \quad (\approx 0.271) \end{aligned}$$



最初の等号が成り立つ理由は後で説明
(チャップマン・コルモゴロフ方程式)

行列に対する計算で見てみる

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} F & C & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} F \\ C \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} F & C & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} F \\ C \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 29/72 & 13/36 & 17/72 \\ 13/36 & 7/18 & 1/4 \\ 17/48 & 3/8 & 13/48 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

計算法を思い出せば、なぜそうなるか分かる

- ① マルコフ連鎖：例
- ② マルコフ連鎖：定義と表現
- ③ チャップマン・コルモゴロフ方程式
- ④ マルコフ連鎖の定常分布
- ⑤ 今日のまとめ

設定

- ▶ 時刻 $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$
- ▶ X_t : 各時刻 t における状態 (確率変数)
- ▶ S : 状態が取りうる値全体から成る集合 (状態空間)
 - ▶ この講義において、 S は有限集合
- ▶ X_t は履歴 $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots, X_{t-1}$ に依存する (かもしれない)

確率過程とは、確率変数の (時間発展により得られる) 列のこと

$$(X_t \mid t \in \mathbb{N})$$

X_0, X_1, \dots : 状態空間を S とする確率変数

マルコフ連鎖とは？

マルコフ連鎖とは次の条件を満たす確率過程 $(X_t \mid t \in \mathbb{N})$ のこと

任意の $t \in \mathbb{N}$, 任意の $x_0, x_1, \dots, x_t, x_{t+1} \in S$ に対して

$$\Pr(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_t = x_t)$$

$$\stackrel{(1)}{=} \Pr(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t)$$

$$\stackrel{(2)}{=} \Pr(X_1 = x_{t+1} \mid X_0 = x_t)$$

ただし、 $\Pr(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_t = x_t) \neq 0$ とする

式の解釈

- (1) 時刻 $t+1$ における状態は、時刻 $0, \dots, t-1$ における状態に依存しない
- (2) 状態が x_t から x_{t+1} に推移する確率は、時刻に依存しない

マルコフ連鎖の定義 (式 (2)) から、
任意の $i, j \in S$ に対して、ある実数 p_{ij} が存在して

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \Pr(X_1 = j \mid X_0 = i) \\ &= \Pr(X_2 = j \mid X_1 = i) \\ &= \Pr(X_3 = j \mid X_2 = i) \\ &= \Pr(X_4 = j \mid X_3 = i) \\ &= \Pr(X_5 = j \mid X_4 = i) \\ &= \dots \end{aligned}$$

p_{ij} を状態 i から状態 j への推移確率 (あるいは遷移確率) と呼ぶ

推移確率 p_{ij} を並べた行列を **推移行列** (あるいは遷移行列) と呼ぶ

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

ただし, $S = \{1, 2, \dots, n\}$ とする

推移行列の持つ性質

- ▶ 任意の $i, j \in S$ に対して, $0 \leq p_{ij} \leq 1$
- ▶ 任意の $i \in S$ に対して, $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$

この2条件を満たす行列を **確率行列** と呼ぶ

逆に, 確率行列はマルコフ連鎖の推移行列であると見せる

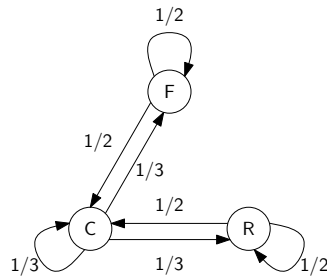
次のようにして作ったラベル付き有向グラフを **状態遷移図** と呼ぶ

- ▶ 頂点集合は状態空間 S
- ▶ $p_{ij} > 0$ のとき, i から j へ向けて弧を描く
- ▶ その弧の横に p_{ij} を付記する

状態遷移図

推移行列

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} F & C & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} F \\ C \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



時刻 t における確率分布

任意の $t \in \mathbb{N}$, 任意の $i, j \in S$ に対して, 次の確率は何か?

$$\Pr(X_t = j \mid X_0 = i)$$

つまり, 時刻0において状態 i にいるとき, 時刻 t において状態 j にいる確率

記法:

$$p_{ij}^{(t)} = \Pr(X_t = j \mid X_0 = i)$$

任意の $i, j \in S$ に対して, $\Pr(X_0 = i) \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(2)} &= \Pr(X_2 = j \mid X_0 = i) \\ &= \frac{\Pr(X_2 = j \text{ かつ } X_0 = i)}{\Pr(X_0 = i)} \\ &= \frac{1}{\Pr(X_0 = i)} \sum_{k \in S} \Pr(X_2 = j \text{ かつ } X_0 = i \mid X_1 = k) \Pr(X_1 = k) \end{aligned}$$

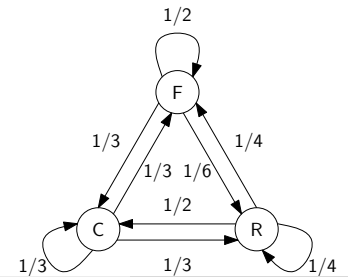
次のようにして作ったラベル付き有向グラフを **状態遷移図** と呼ぶ

- ▶ 頂点集合は状態空間 S
- ▶ $p_{ij} > 0$ のとき, i から j へ向けて弧を描く
- ▶ その弧の横に p_{ij} を付記する

状態遷移図

推移行列

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} F & C & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} F \\ C \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



注: オートマトンに対する状態遷移図と少し異なる

- 1 マルコフ連鎖：例
- 2 マルコフ連鎖：定義と表現
- 3 チャップマン・コルモゴロフ方程式
- 4 マルコフ連鎖の定常分布
- 5 今日のまとめ

任意の $i, j \in S$ に対して

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(1)} &= \Pr(X_1 = j \mid X_0 = i) \\ &= p_{ij} \end{aligned}$$

これは簡単

$$\begin{aligned} &\Pr(X_2 = j \text{ かつ } X_0 = i \mid X_1 = k) \Pr(X_1 = k) \\ &= \Pr(X_2 = j \mid X_0 = i \text{ かつ } X_1 = k) \Pr(X_0 = i \mid X_1 = k) \Pr(X_1 = k) \\ &= \Pr(X_2 = j \mid X_1 = k) \Pr(X_0 = i \mid X_1 = k) \Pr(X_1 = k) \\ &\quad \text{(マルコフ連鎖の定義より)} \\ &= \Pr(X_1 = j \mid X_0 = k) \Pr(X_0 = i \mid X_1 = k) \Pr(X_1 = k) \\ &\quad \text{(マルコフ連鎖の定義より)} \\ &= \Pr(X_1 = j \mid X_0 = k) \Pr(X_0 = i \text{ かつ } X_1 = k) \\ &= \Pr(X_1 = j \mid X_0 = k) \Pr(X_1 = k \mid X_0 = i) \Pr(X_0 = i) \end{aligned}$$

演習問題

任意の事象 A, B, C に対して, $\Pr(B \text{ かつ } C) \neq 0$ のとき

$$\Pr(A \text{ かつ } B \mid C) = \Pr(A \mid B \text{ かつ } C) \Pr(B \mid C)$$

したがって、

$$\begin{aligned}
 p_{ij}^{(2)} &= \frac{1}{\Pr(X_0 = i)} \sum_{k \in S} \Pr(X_2 = j \text{ かつ } X_0 = i \mid X_1 = k) \Pr(X_1 = k) \\
 &= \frac{1}{\Pr(X_0 = i)} \sum_{k \in S} \Pr(X_1 = j \mid X_0 = k) \Pr(X_1 = k \mid X_0 = i) \Pr(X_0 = i) \\
 &= \sum_{k \in S} \Pr(X_1 = j \mid X_0 = k) \Pr(X_1 = k \mid X_0 = i) \\
 &= \sum_{k \in S} p_{kj} p_{ik} \\
 &= \sum_{k \in S} p_{ik} p_{kj}
 \end{aligned}$$

つまり、 $p_{ij}^{(2)}$ は行列積 \mathbf{P}^2 の第 i, j 成分に等しい

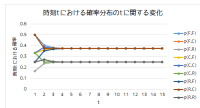
行列に対する計算で見てみる

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} F & C & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} F \\ C \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} F & C & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} F \\ C \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 29/72 & 13/36 & 17/72 \\ 13/36 & 7/18 & 1/4 \\ 17/48 & 3/8 & 13/48 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

先ほどの \mathbf{P} から $\mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3, \dots$ を計算して、各成分をプロット



$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}^t = \begin{matrix} & \begin{matrix} F & C & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} F \\ C \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 1/4 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

観察

- ▶ $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}^t$ が存在する ?????
- ▶ $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}^t$ の行はすべて同じ ?????

- 1 マルコフ連鎖：例
- 2 マルコフ連鎖：定義と表現
- 3 チャップマン・コルモゴロフ方程式
- 4 マルコフ連鎖の定常分布
- 5 今日のまとめ

記法： $p_{ij}^{(t)} = \Pr(X_t = j \mid X_0 = i)$

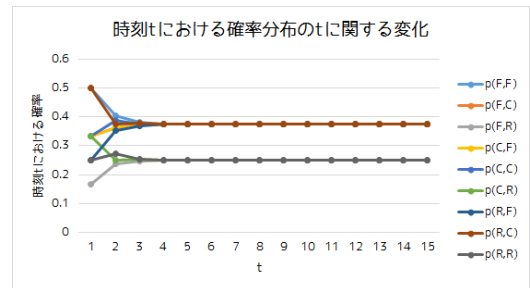
チャップマン・コルモゴロフ方程式

任意の時刻 $t = 0, 1, \dots$ に対して、

$$p_{ij}^{(t)} \text{ は行列積 } \mathbf{P}^t \text{ の第 } i, j \text{ 成分に等しい}$$

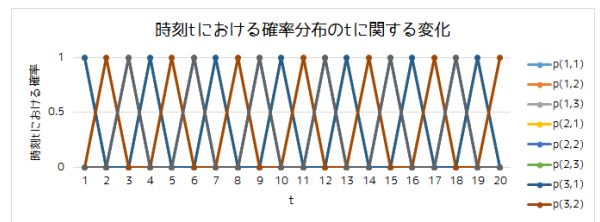
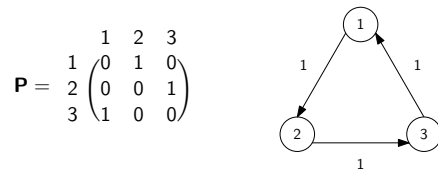
証明：演習問題 (例えば、 t に関する帰納法)

先ほどの \mathbf{P} から $\mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3, \dots$ を計算して、各成分をプロット



$t \rightarrow \infty$ のとき

$$p_{FF}^{(t)} = p_{CF}^{(t)} = p_{RF}^{(t)} \rightarrow \frac{3}{8}, p_{FC}^{(t)} = p_{CC}^{(t)} = p_{RC}^{(t)} \rightarrow \frac{3}{8}, p_{FR}^{(t)} = p_{CR}^{(t)} = p_{RR}^{(t)} \rightarrow \frac{1}{4}$$



状態空間 $S = \{1, 2, \dots, n\}$

- ▶ 各状態 $i \in S$ に対して、確率 p_i が定義されているとする
- ▶ 解釈：時刻 0 における確率 ($p_i = \Pr(X_0 = i)$)
- ▶ $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ ：行ベクトル
- ▶ 満たされるべき条件
 - 1 任意の $i \in S$ に対して、 $0 \leq p_i \leq 1$
 - 2 $\sum_{i \in S} p_i = 1$
- ▶ この 2 条件を満たすベクトル $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ を S 上の確率分布と呼ぶ

推移行列 \mathbf{P} を持つマルコフ連鎖を考える

定常分布とは？

確率分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) \in \mathbb{R}^n$ が \mathbf{P} で定められるマルコフ連鎖の定常分布であるとは、次を満たすこと

$$\pi \mathbf{P} = \pi$$

- ▶ 行列を使わずに書くと、任意の $j \in S$ に対して

$$\sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} = \pi_j$$

- ▶ (線形代数のことは使えば)、 1 は \mathbf{P} の右固有値で、それに対する \mathbf{P} の右固有ベクトル (を規格化したものが) π

推移行列 \mathbf{P} を持つマルコフ連鎖を考える

定常分布とは？

確率分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) \in \mathbb{R}^n$ が \mathbf{P} で定められるマルコフ連鎖の定常分布であるとは、次を満たすこと

$$\pi \mathbf{P} = \pi$$

- ▶ 行列を使わずに書くと、任意の $j \in S$ に対して

$$\sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} = \pi_j$$

- ▶ $\pi_i = \Pr(X_0 = i)$ とすると、上の式の意味は

$$\Pr(X_0 = j) = \sum_{i \in S} \Pr(X_0 = i) \Pr(X_1 = j | X_0 = i) = \Pr(X_1 = j)$$

つまり、 $\Pr(X_0 = j) = \Pr(X_1 = j) = \dots$ となる (その意味で「定常」)

推移行列 \mathbf{P} を持つマルコフ連鎖を考える

命題 (証明は難しいので省略)

ある自然数 m が存在して \mathbf{P}^m の成分がすべて正となると、次が成立

- 1 定常分布 π は一意に存在する (ただ 1 つだけ存在する)
- 2 極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}^t$ が存在し、その各行は π に等しい

証明のためのキーワード：ペロン・フロベニウスの定理

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

このとき、 $\pi = (3/8, 3/8, 1/4)$ とすると、

$$\pi \mathbf{P} = (3/8, 3/8, 1/4) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = (3/8, 3/8, 1/4) = \pi$$

- ▶ $\therefore \pi$ はこのマルコフ連鎖の定常分布
- ▶ \mathbf{P} の各成分は正なので、 $\lim \mathbf{P}^t$ は存在して、その各行は π に等しい

どのようにして、 $\pi = (3/8, 3/8, 1/4)$ を見つけたか？

- ▶ $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ とする
- ▶ 次の方程式を解く
 - (1) $\frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 = \pi_1$
 - (2) $\frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 = \pi_2$
 - (3) $\frac{1}{6}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 = \pi_3$
 - (4) $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$
- ▶ (1), (2), (3) を書き直す
 - (5) $-6\pi_1 + 4\pi_2 + 3\pi_3 = 0$
 - (6) $2\pi_1 - 4\pi_2 + 3\pi_3 = 0$
 - (7) $2\pi_1 + 4\pi_2 - 9\pi_3 = 0$
- ▶ (5)+(6), (7)-(6) から次を得る
 - (8) $-4\pi_1 + 6\pi_3 = 0$, すなわち、 $\pi_1 = \frac{3}{2}\pi_3$
 - (9) $8\pi_2 - 12\pi_3 = 0$, すなわち、 $\pi_2 = \frac{3}{2}\pi_3$
- ▶ この 2 つを (4) に代入して次を得る
 - (10) $\frac{3}{2}\pi_3 + \frac{3}{2}\pi_3 + \pi_3 = 1$, すなわち、 $\pi_3 = \frac{1}{4}$
- ▶ したがって、 $\pi_1 = \pi_2 = \frac{3}{8}$ □

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき、 $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$ とすると、

$$\pi \mathbf{P} = (1/3, 1/3, 1/3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (1/3, 1/3, 1/3) = \pi$$

- ▶ $\therefore \pi$ はこのマルコフ連鎖の定常分布
- ▶ しかし、 $\lim \mathbf{P}^t$ は存在しない (詳細は次のページ)

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \end{aligned}$$

つまり、 $\mathbf{P}, \mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3$ はすべて異なり、 $\mathbf{P}^4 = \mathbf{P}$ なので、 $\lim \mathbf{P}^t$ は存在しない

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき、 $\pi = (0, 0, 1)$ とすると、

$$\pi \mathbf{P} = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 1) = \pi$$

- ▶ $\therefore \pi$ はこのマルコフ連鎖の定常分布
- ▶ しかし、 $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ であるため、 $\lim \mathbf{P}^t = \mathbf{P}$ となり、 $\lim \mathbf{P}^t$ が存在することは分かるが、 $\lim \mathbf{P}^t$ のすべての行が π と同じになるわけではない

- ① マルコフ連鎖：例
- ② マルコフ連鎖：定義と表現
- ③ チャップマン・コルモゴロフ方程式
- ④ マルコフ連鎖の定常分布
- ⑤ 今日のまとめ

今日の目標

マルコフ連鎖について以下ができるようになる

- ▶ 推移行列と状態遷移図を用いてマルコフ連鎖が表現できる
- ▶ チャップマン・コルモゴロフ方程式を用いて、マルコフ連鎖における時間発展を表現できる
- ▶ 定常分布をマルコフ連鎖の極限と正しく関連付けられる

この講義で扱うマルコフ連鎖は

「斉時 離散時間 有限状態 マルコフ連鎖」と呼ばれるもの