

スケジュール 後半 (予定)

- 8 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/2)
- 9 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/9)
 - * 中間試験 (12/16)
- 10 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/6)
- 11 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/13)
- 12 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/20)
 - * 休講 (海外出張) (1/27)
- 13 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (2/3)
 - * 期末試験 (2/17?)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

今日の目標

典型的な確率的離散システムの解析ができるようになる

- ▶ 不公平な硬貨投げ
- ▶ クーポン収集問題
- ▶ 誕生日のパラドックス
- ▶ 箱と玉のモデル

不公平な硬貨投げ

不公平な硬貨投げ：設定

不公平な硬貨投げ

次のような硬貨 (コイン) を 1 つ投げる

- ▶ 表の出る確率 = p
- ▶ 裏の出る確率 = $1 - p$

ただし, $0 < p \leq 1$

典型的な問題：この硬貨を続けて何回か独立に投げる

- 1 n 回投げて, 表が n 回出る確率は?
- 2 n 回投げて, 表が一度も出ない確率は?
- 3 n 回投げて, 表が一度は出る確率は?
- 4 n 回投げて, 表が出る回数の期待値は?
- 5 表が出るまで投げ続けるとき, 投げる回数の期待値は?

スケジュール 前半 (予定)

- 1 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/7)
 - * 休講 (体育祭) (10/14)
- 2 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/21)
- 3 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/28)
- 4 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/4)
- 5 離散代数：群と対称性 (11/11)
- 6 離散代数：部分群と軌道 (11/18)
- 7 離散代数：対称性を考慮した数え上げ (11/25)

中間試験

中間試験

- ▶ 日時
 - ▶ 12 月 16 日 (火) : 1 限 (遅刻しないように)
- ▶ 出題範囲
 - ▶ 第 1 回から第 7 回 (前回) まで
- ▶ 出題形式
 - ▶ 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
 - ▶ その中の 2 題は演習問題として提示されたものと同じである (複数の演習問題が組み合わせられて 1 題とされる可能性もある) (「発展」として提示された演習問題は出題されない)
 - ▶ 全問に解答する
- ▶ 配点：1 題 15 点満点, 計 60 点満点
- ▶ 時間：90 分
- ▶ 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

不公平な硬貨投げ

目次

- 1 不公平な硬貨投げ
- 2 クーポン収集問題
- 3 誕生日のパラドックス
- 4 箱と玉のモデル
- 5 今日のまとめ

不公平な硬貨投げ

不公平な硬貨投げ：表が出続ける確率は？

- ▶ $E_i = i$ 回目に表が出る (事象)
- ▶ このとき, E_1, \dots, E_n は独立なので

$$\begin{aligned} \Pr(\text{表が } n \text{ 回出る}) &= \Pr(E_1 \text{ かつ } E_2 \text{ かつ } \dots \text{ かつ } E_n) \\ &= \Pr(E_1) \cdot \Pr(E_2) \cdot \dots \cdot \Pr(E_n) \\ &= p \cdot p \cdot \dots \cdot p \\ &= p^n \end{aligned}$$

不公平な硬貨投げ：表が一度も出ない確率は？

- ▶ $\bar{E}_i = i$ 回目に裏が出る (事象)
- ▶ このとき, $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n$ は独立なので

$$\begin{aligned} \Pr(n \text{ 回中, 表が一度も出ない}) &= \Pr(\bar{E}_1 \text{ かつ } \dots \text{ かつ } \bar{E}_n) \\ &= \Pr(\bar{E}_1) \cdots \Pr(\bar{E}_n) \\ &= (1-p) \cdots (1-p) \\ &= (1-p)^n \end{aligned}$$

不公平な硬貨投げ：表が一度は出る確率は？

- ▶ 「表が一度は出る」という事象は「表が一度も出ない」という事象の余事象
- ▶ したがって,

$$\begin{aligned} \Pr(n \text{ 回中, 表が一度は出る}) &= 1 - \Pr(n \text{ 回中, 表が一度も出ない}) \\ &= 1 - (1-p)^n \end{aligned}$$

不公平な硬貨投げ：表が出る回数の期待値は？

- ▶ 次の確率変数を考える (事象 E_i の**標示確率変数**と呼ばれる)

$$X_i = \begin{cases} 1 & (E_i \text{ が生起する, つまり, } i \text{ 回目に表が出る}) \\ 0 & (E_i \text{ が生起しない, つまり, } i \text{ 回目に裏が出る}) \end{cases}$$

- ▶ このとき, $E[X_i] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$
- ▶ したがって,

$$\begin{aligned} E[n \text{ 回中, 表が出る回数}] &= E[X_1 + \dots + X_n] \\ &= E[X_1] + \dots + E[X_n] = pn \end{aligned}$$

不公平な硬貨投げ：表が出るまで投げ続けるとき, 投げる回数の期待値は？

- ▶ $A_i = 1$ 回目から $i-1$ 回目まですべて裏で, i 回目で表が出る (事象)
- ▶ このとき,

$$\begin{aligned} \Pr(A_i) &= \Pr(\bar{E}_1 \text{ かつ } \dots \text{ かつ } \bar{E}_{i-1} \text{ かつ } E_i) \\ &= \Pr(\bar{E}_1) \cdots \Pr(\bar{E}_{i-1}) \cdot \Pr(E_i) \\ &= (1-p)^{i-1} p \end{aligned}$$

- ▶ したがって,

$$\begin{aligned} \text{求める期待値} &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \Pr(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (1-p)^{i-1} p \\ &= \frac{1}{p} \quad (\text{詳細は演習問題}) \end{aligned}$$

不公平な硬貨投げ：表が出る回数が期待値から離れる確率は？

- ▶ 次の確率変数を考える (事象 E_i の**標示確率変数**と呼ばれる)

$$X_i = \begin{cases} 1 & (E_i \text{ が生起する, つまり, } i \text{ 回目に表が出る}) \\ 0 & (E_i \text{ が生起しない, つまり, } i \text{ 回目に裏が出る}) \end{cases}$$

- ▶ このとき,

$$\begin{aligned} E[n \text{ 回中, 表が出る回数}] &= E[X_1 + \dots + X_n] \\ &= E[X_1] + \dots + E[X_n] = pn \end{aligned}$$

次の確率はどれくらい小さいか? (または大きいか?)

$$\Pr(X_1 + \dots + X_n \geq 2pn)$$

不公平な硬貨投げ：マルコフの不等式

マルコフの不等式より

$$\Pr(X_1 + \dots + X_n \geq 2pn) \leq \frac{E[X_1 + \dots + X_n]}{2pn} = \frac{pn}{2pn} = \frac{1}{2}$$

「とても小さい」ということが証明できない

マルコフの不等式

(復習)

自然数値確率変数 $X \geq 0$ と正実数 $t > 0$ に対して, $E[X]$ が存在するとき

$$\Pr(X \geq t) \leq \frac{E[X]}{t}$$

不公平な硬貨投げ：チェルノフ上界の技法

マルコフの不等式より

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 + \dots + X_n \geq 2pn) &= \Pr(2^{X_1 + \dots + X_n} \geq 2^{2pn}) \\ &\leq \frac{E[2^{X_1 + \dots + X_n}]}{2^{2pn}} \end{aligned}$$

よって, $E[2^{X_1 + \dots + X_n}]$ を知りたい

不公平な硬貨投げ：チェルノフ上界の技法 (2)

 X_1, \dots, X_n は独立な確率変数なので, $2^{X_1}, \dots, 2^{X_n}$ も独立であり,

$$\begin{aligned} E[2^{X_1 + \dots + X_n}] &= E\left[\prod_{i=1}^n 2^{X_i}\right] \\ &= \prod_{i=1}^n E[2^{X_i}] \quad \leftarrow \text{独立性を利用} \end{aligned}$$

ここで, 任意の i に対して

$$E[2^{X_i}] = 2^1 \cdot p + 2^0 \cdot (1-p) = 2p + (1-p) = 1+p$$

ゆえに,

$$E[2^{X_1 + \dots + X_n}] = \prod_{i=1}^n E[2^{X_i}] = (1+p)^n$$

まとめると、

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 + \dots + X_n \geq 2pn) &\leq \frac{E[2^{X_1 + \dots + X_n}]}{2^{2pn}} \\ &= \frac{(1+p)^n}{2^{2pn}} = \left(\frac{1+p}{4p}\right)^n \end{aligned}$$

- ▶ 右辺は n が大きくなるにつれて小さくなる
- ▶ $p = 1/2$ のとき、右辺 = $(3/4)^n$

疑問

- ▶ 疑問： X_i から 2^{X_i} を作ったが、「2」でないといけないのか？
- ▶ 回答：「2」でなくてもよい。1 より大きければよい

例えば、2 ではなく、3 にすると、

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 + \dots + X_n \geq 2pn) &\leq \frac{E[3^{X_1 + \dots + X_n}]}{3^{2pn}} \\ &= \frac{(1+2p)^n}{3^{2pn}} = \left(\frac{1+2p}{9p}\right)^n \end{aligned}$$

$p = 1/2$ のとき、この右辺は $(2/3)^n$

チェルノフ上界の技法： X が独立確率変数の和であるとき

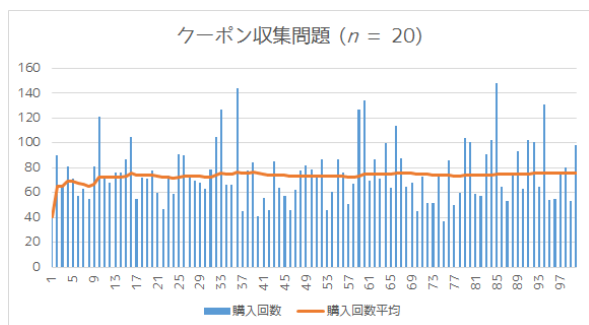
- ▶ $E[X]$ の代わりに $E[c^X]$ を考えて、マルコフの不等式 (など) を適用
- ▶ 上界ができる限り小さくなるように、定数 c を定める

目次

- 不公平な硬貨投げ
- クーポン収集問題
- 誕生日のパラドックス
- 箱と玉のモデル
- 今日のまとめ

クーポン収集問題：シミュレーション

景品数 20 の場合



10000 回の試行：購入商品数平均 = 72.0825

クーポン収集問題：期待値 (続き)

- ▶ 購入商品数 = $X_0 + X_1 + \dots + X_{n-1}$ なので、

$$\begin{aligned} E[\text{購入商品数}] &= E[X_0 + X_1 + \dots + X_{n-1}] \\ &= E[X_0] + E[X_1] + \dots + E[X_{n-1}] \\ &= \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \dots + \frac{n}{1} \\ &= n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

調和数とは？

第 n 調和数とは、次で定義される数 H_n のこと

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

クーポン収集問題

設定

- ▶ 商品を買うと n 種類の景品 (クーポン) の中の 1 つが当たる
- ▶ 景品の集合 $N = \{1, \dots, n\}$
- ▶ どの景品 i に対しても、 $\Pr(\text{景品 } i \text{ が当たる}) = \frac{1}{n}$ で、これらは商品の中で同一であり独立

問題

- ▶ 全種類の景品を集め切るまで、何個商品を購入すればよいか？

注意：購入商品数は確率変数なので、答えたいものは

- ▶ 購入商品数の期待値
- ▶ 高確率で購入する商品数 (の上界)

クーポン収集問題：期待値

考え方：商品を次々と買うとき、既にいくつ景品を持っているか考慮する

- ▶ $\Pr(\text{新しい景品が当たる} \mid \text{既に景品を } j \text{ 個所持}) = \frac{n-j}{n}$

ここで、次の確率変数を考える

$$X_j = \begin{array}{l} \text{景品を } j \text{ 種類所持した瞬間から、} \\ \text{新しい景品が当たるまでに購入した商品の数} \end{array}$$

- ▶ 景品を j 種類所持しているとき、新しい景品が当たることは表が出る確率が $\frac{n-j}{n}$ である硬貨を投げて表が出ることとみなせる
- ▶ したがって、 $E[X_j] = \frac{n}{n-j}$

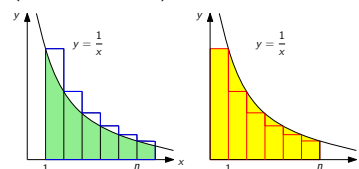
調和数の性質

調和数の上界と下界

任意の整数 $n \geq 1$ に対して

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$$

証明：演習問題 (ヒントは次の図)



帰結

$$H_n = \ln n + O(1)$$

- すなわち、

$$E[\text{購入商品数}] = nH_n = n \ln n + O(n)$$

- マルコフの不等式より

$$\Pr(\text{購入商品数} \geq 2nH_n) \leq \frac{E[\text{購入商品数}]}{2nH_n} = \frac{1}{2}$$

「チェルノフ上界の技法」を用いれば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(\text{購入商品数} \geq 2nH_n) \rightarrow 0$$

を証明できる (が、煩雑なのでここではやらない)

クーポン収集問題

設定

- 商品を買うと n 種類の景品 (クーポン) の中の 1 つが当たる
- 景品の集合 $N = \{1, \dots, n\}$
- どの景品 i に対しても、 $\Pr(\text{景品 } i \text{ が当たる}) = \frac{1}{n}$ で、これらは商品の中で同一であり独立

問題

- すべての景品を集め切るまで、何個商品を購入すればよいか?

回答

- 購入商品数の期待値は nH_n であり、
- $n \rightarrow \infty$ のとき、購入商品数は nH_n に収束する

誕生日問題

10 人いる部屋の中に、誕生日が同じ 2 人はいるか？
そのような 2 人がいる確率は？

仮定

- 1 年は 366 日
- 人の誕生日がそれら 366 日の間に等確率で分布する

$$\Pr(i \text{ さんの誕生日が } j) = \frac{1}{366}$$

まず、30 人の誕生日がすべて異なる確率を計算する

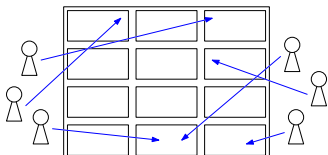
- 30 人の誕生日がすべて異なる確率 = $\frac{366 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 337}{366^{30}} \approx 0.295$

したがって

- 30 人の中に誕生日の同じ人がいる確率 $\approx 1 - 0.295 = 0.705$

つまり、

- 70 % ぐらいの確率で同じ誕生日の 2 人がいる



次が知られている (証明は省略)

エルデシュとレニイによる 1961 年の結果

任意の正実数 $c > 0$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(\text{購入商品数} > n \ln n + cn) = 1 - e^{-e^{-c}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(\text{購入商品数} < n \ln n + cn) = 1 - e^{-e^{-c}}$$

つまり購入商品数 (確率変数) は、その期待値の周りに集中している

- 不公平な硬貨投げ
- クーポン収集問題
- 誕生日のパラドックス
- 箱と玉のモデル
- 今日のまとめ

まず、10 人の誕生日がすべて異なる確率を計算する

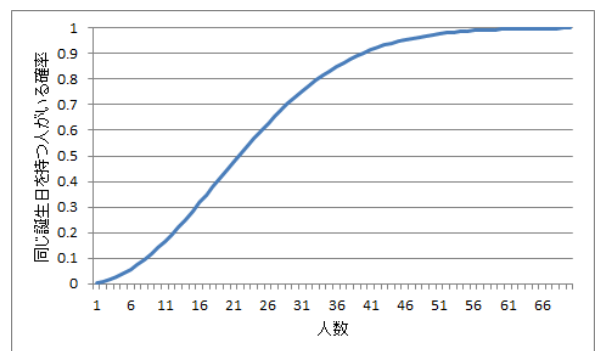
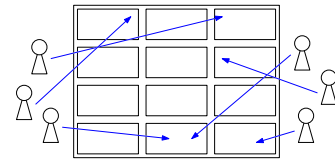
- 10 人の誕生日がすべて異なる確率 = $\frac{366 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 357}{366^{10}} \approx 0.883$

したがって

- 10 人の中に誕生日の同じ人がいる確率 $\approx 1 - 0.883 = 0.117$

つまり、

- 11 % ぐらいの確率で同じ誕生日の 2 人がいる



設定

- ▶ $k = 1$ 年の日数
- ▶ $m =$ 部屋の人数
- ▶ $\Pr(i \text{ さんの誕生日が } j) = \frac{1}{k}$

問題

- 1 部屋の中に同じ誕生日の2人がいる確率は？
- 2 同じ誕生日の2人がいる確率が $\frac{1}{2}$ を超えるのはいつ？

したがって、

- ▶ m 人の中に誕生日が同じ2人がいる確率 $\geq 1 - e^{-\frac{m(m-1)}{2k}}$
- ▶ $m \geq \sqrt{(2 \ln 2)k + 1}$ のとき、この右辺が $\frac{1}{2}$ 以上になる

なぜならば、 $m \geq \sqrt{(2 \ln 2)k + 1}$ であるとき、

$$(m-1)^2 \geq (2 \ln 2)k$$

$$\therefore m(m-1) \geq (2 \ln 2)k$$

$$\therefore -\ln 2 \geq -\frac{m(m-1)}{2k}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \geq e^{-\frac{m(m-1)}{2k}}$$

$$\therefore 1 - e^{-\frac{m(m-1)}{2k}} \geq \frac{1}{2} \text{ となるから}$$

ハッシュ

(アルゴリズム論第一の復習)

ハッシュ関数は $N = \{1, \dots, n\}$ から $K = \{1, \dots, k\}$ への関数 h (典型的には $k < n$)

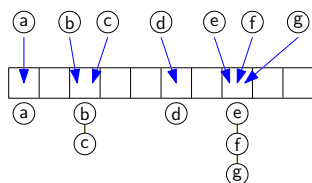
- ▶ 性質: h が「よくかき混ぜる」関数であるとき $h(x) = h(y)$ であるならば、 $x = y$ である可能性が高い
- ▶ $x \neq y$ であるのに $h(x) = h(y)$ であるとき、 x と y のハッシュ値が衝突 (好ましくない)

次の2つは同じであると見せる

- ▶ 要素数 m の部分集合 $S \subseteq N$ にハッシュ値の衝突する2要素があるか？
- ▶ 1年が k 日の場合、 m 人の部屋の中に誕生日の同じ2人がいるか？

$\therefore m \geq \sqrt{(2 \ln 2)k + 1}$ のとき、そのような2要素の存在確率は $\frac{1}{2}$ 以上

同じハッシュ値を持つ要素は、連結リストで保持する



疑問

一番長い連結リストの長さはいくらですか？

- ▶ 一番長い連結リストの長さの期待値

まず、 m 人の誕生日がすべて異なる確率を計算する

$$\text{▶ } m \text{ 人の誕生日がすべて異なる確率} = \frac{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-m+1)}{k^m}$$

▶ ここで、

$$\begin{aligned} \frac{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-m+1)}{k^m} &= \prod_{i=0}^{m-1} \frac{k-i}{k} = \prod_{i=0}^{m-1} \left(1 - \frac{i}{k}\right) \\ &\leq \prod_{i=0}^{m-1} e^{-\frac{i}{k}} = e^{-\sum_{i=0}^{m-1} \frac{i}{k}} = e^{-\frac{m(m-1)}{2k}} \end{aligned}$$

事実: 有用な不等式

(第1回講義の復習)

任意の実数 x に対して

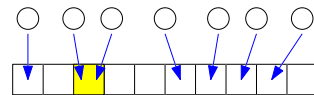
$$1 + x \leq e^x$$

ハッシュ

(アルゴリズム論第一の復習)

ハッシュ関数は $N = \{1, \dots, n\}$ から $K = \{1, \dots, k\}$ への関数 h (典型的には $k < n$)

- ▶ 性質: h が「よくかき混ぜる」関数であるとき $h(x) = h(y)$ であるならば、 $x = y$ である可能性が高い
- ▶ $x \neq y$ であるのに $h(x) = h(y)$ であるとき、 x と y のハッシュ値が衝突 (好ましくない)



- 1 不公平な硬貨投げ
- 2 クーポン収集問題
- 3 誕生日のパラドックス
- 4 箱と玉のモデル
- 5 今日のまとめ

設定

- ▶ 箱の集合 $K = \{1, \dots, k\}$
- ▶ 玉の集合 $N = \{1, \dots, n\}$
- ▶ 玉を箱へランダムに入れる (独立に)
- ▶ $\Pr(\text{玉 } i \text{ を箱 } j \text{ に入れる}) = \frac{1}{k}$
- ▶ 単純化として、 $n = k$ で、 n は十分大きいと仮定する

問題

- ▶ 箱に入る玉の数の最大値は？

注意: 「箱に入る玉の数の最大値」は確率変数

箱と玉のモデル

箱 j に玉が ℓ 個入る確率は？

$$\begin{aligned} \Pr(\text{箱 } j \text{ に玉が } \ell \text{ 個入る}) &= \binom{n}{\ell} \left(\frac{1}{k}\right)^\ell \\ &\leq \left(\frac{en}{\ell}\right)^\ell \left(\frac{1}{k}\right)^\ell \\ &= \left(\frac{en}{\ell k}\right)^\ell = \left(\frac{e}{\ell}\right)^\ell \end{aligned}$$

二項係数：簡単な評価

(第1回講義より)

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して、 $a \geq b$ であるとき、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \frac{a^b}{b!} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

箱と玉のモデル

したがって、 $\ell \geq 3 \frac{\ln n}{\ln \ln n}$ のとき、

$$\Pr(\text{箱 } j \text{ に玉が } \ell \text{ 個入る}) = \left(\frac{e}{\ell}\right)^\ell \leq \frac{1}{n^2}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \Pr(\text{玉が } \ell \text{ 個入る箱が存在}) &= \Pr(\text{箱 } 1 \text{ に玉が } \ell \text{ 個入る, または, } \dots \text{ 箱 } n \text{ に玉が } \ell \text{ 個入る}) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \Pr(\text{箱 } j \text{ に玉が } \ell \text{ 個入る}) \leq n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

したがって、

$$\Pr(\text{どの箱にも高々 } 3 \frac{\ln n}{\ln \ln n} \text{ 個しか玉がない}) \geq 1 - \frac{1}{n}$$

箱と玉のモデル：他の問題との関係

「箱と玉のモデル」における文脈で言い直すと…

クーポン収集問題

すべての箱に少なくとも1つ玉が入るようになるまで、入れる玉の総数は何か？

誕生日のパラドックス

ある箱に玉が複数入る確率は何か？

その他の様々な問題も考えることができ、考えられている

今日の目標

今日の目標

典型的な確率的離散システムの解析ができるようになる

- ▶ 不公平な硬貨投げ
- ▶ クーポン収集問題
- ▶ 誕生日のパラドックス
- ▶ 箱と玉のモデル

箱と玉のモデル

ここで、 $\ell \geq 3 \frac{\ln n}{\ln \ln n}$ とすると、 $e < 3$ なので、

$$\begin{aligned} \left(\frac{e}{\ell}\right)^\ell &\leq \left(\frac{e}{3 \frac{\ln n}{\ln \ln n}}\right)^{3 \frac{\ln n}{\ln \ln n}} = \left(\frac{e \ln \ln n}{3 \ln n}\right)^{3 \frac{\ln n}{\ln \ln n}} \leq \left(\frac{\ln \ln n}{\ln n}\right)^{3 \frac{\ln n}{\ln \ln n}} \\ &= \left(e^{\ln \left(\frac{\ln \ln n}{\ln n}\right)}\right)^{3 \frac{\ln n}{\ln \ln n}} = \left(e^{\ln \ln \ln n - \ln \ln n}\right)^{3 \frac{\ln n}{\ln \ln n}} \\ &= e^{3 \frac{\ln \ln \ln n}{\ln \ln n} \ln n - 3 \ln n} \end{aligned}$$

ここで、 n が十分大きいので、 $3 \frac{\ln \ln \ln n}{\ln \ln n} \leq 1$ となり、

$$\left(\frac{e}{\ell}\right)^\ell \leq e^{\ln n - 3 \ln n} = \frac{1}{n^2}$$

補足

関数 $x \mapsto \frac{1}{x^x}$ は $x \geq 1$ において単調減少

箱と玉のモデル：まとめ

設定

- ▶ 箱の集合 $K = \{1, \dots, k\}$
- ▶ 玉の集合 $N = \{1, \dots, n\}$
- ▶ 玉を箱へランダムに入れる (独立に)
- ▶ $\Pr(\text{玉 } i \text{ を箱 } j \text{ に入れる}) = \frac{1}{k}$
- ▶ 単純化として、 $n = k$ で、 n は十分大きいと仮定する

問題

- ▶ 箱に入る玉の数の最大値は？

回答

- ▶ 箱に入る玉の数の最大値は高い確率で $3 \frac{\ln n}{\ln \ln n}$ 以下 (高い確率で $= n \rightarrow \infty$ のとき確率 1 で)

目次

- ① 不公平な硬貨投げ
- ② クーポン収集問題
- ③ 誕生日のパラドックス
- ④ 箱と玉のモデル
- ⑤ 今日のまとめ