離散数理工学 第 8 回
離散確率論：確率の復習と確率不等式

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 12 月 2 日

最終更新：2015 年 1 月 6 日　08:44

スケジュール 前半 (予定)

1. 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/7)
- ⋆ 休講 (体育祭) (10/14)
2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/21)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/28)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/4)
5. 離散代数：群と対称性 (11/11)
6. 離散代数：部分群と軌道 (11/18)
7. 離散代数：対称性を考慮した数え上げ (11/25)

スケジュール 後半 (予定)

8. 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/2)
9. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/9)
- ⋆ 中間試験 (12/16)
10. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/6)
11. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/13)
12. 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/20)
- ⋆ 休講 (海外出張) (1/27)
13. 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (2/3)
- ⋆ 期末試験 (2/17?)

注意：予定の変更もありうる

中間試験

中間試験
- 日時
  - 12 月 16 日 (火)：1 限 (遅刻しないように)
- 出題範囲
  - 第 1 回から第 7 回 (前回) まで
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
  - その中の 2 題は演習問題として提示されたものと同一である
    (複数の演習問題が組み合わされて 1 題とされる可能性もある)
    (「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 15 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

今日の目標

今日の目標

確率の基礎を復習する
- 確率，条件つき確率，確率の加法性
- 期待値，条件つき期待値，期待値の線形性

確率に関する基礎的な不等式を使えるようになる
- 合併上界 (和集合上界)
- マルコフの不等式

目次

確率空間

確率空間とは？

確率空間とは，集合 Ω と，関数 $\mathrm{Pr}\colon \Omega \to \mathbb{R}$ の対 (Ω, Pr) で
次を満たすもののこと

1. 任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$0 \leq \mathrm{Pr}(\omega) \leq 1$
2. $\sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{Pr}(\omega) = 1$

この講義では，2 にある和が定義できる場合のみ考える
(例えば，$\Omega = \mathbb{R}$ の場合は考えない)

例：公平なサイコロ

公平なサイコロを振ったときの出目を表す確率空間は
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\mathrm{Pr}(1) = \mathrm{Pr}(2) = \mathrm{Pr}(3) = \mathrm{Pr}(4) = \mathrm{Pr}(5) = \mathrm{Pr}(6) = \frac{1}{6}$

事象

事象とは？

- 確率空間 (Ω, Pr) における事象とは，Ω の部分集合のこと
- 事象 $A \subseteq \Omega$ に対して，A の確率を次で定義

$$\mathrm{Pr}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathrm{Pr}(\omega)$$

例：サイコロ

$A = \{1, 3, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$ に対して

$$\mathrm{Pr}(A) = \mathrm{Pr}(1) + \mathrm{Pr}(3) + \mathrm{Pr}(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

(A は「出目が奇数である」という事象)

事象：用語

事象とは？

- 確率空間 $(\Omega, \Pr)$ における事象とは，Ω の部分集合のこと
- 事象 $A \subseteq \Omega$ に対して，A の確率を次で定義

$$\Pr(A) = \sum_{\omega \in A} \Pr(\omega)$$

用語

- Ω：全事象
- $\emptyset$：空事象
- 各 $\omega \in \Omega$：根元事象
- 各 $A \subseteq \Omega$ に対する $\Omega - A$：A の余事象

注意 (演習問題)

$\Pr(\Omega) = 1$，$\Pr(\emptyset) = 0$

確率変数

確率変数とは？

確率空間 $(\Omega, \Pr)$ 上の (実数値) 確率変数とは，
各根元事象に実数を割り当てる関数 $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$

例：サイコロ

「出目の 2 乗」を表す確率変数 X $(\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$

$$X(1) = 1, \quad X(2) = 4, \quad X(3) = 9,$$
$$X(4) = 16, \quad X(5) = 25, \quad X(6) = 36$$

確率変数と確率：表記法

- 事象「$X = a$」は「$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}$」を表す
- つまり，$\Pr(X = a) = \sum_{\omega : X(\omega) = a} \Pr(\omega)$
- 同様に，$\Pr(X \leq a) = \sum_{\omega : X(\omega) \leq a} \Pr(\omega)$

例：公平なサイコロ

「出目の 2 乗」を表す確率変数 X に対して

- $\Pr(X = 9) = \Pr(3) = \frac{1}{6}$
- $\Pr(10 \leq X \leq 30) = \Pr(4) + \Pr(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

事象と述語：表記法

- Ω 上の述語「P」を「$\{\omega \in A \mid P(\omega)\}$」という事象と同一視する
- つまり，$\Pr(P) = \sum_{\omega : P(\omega)} \Pr(\omega)$

例：公平なサイコロ

- $\Pr(\text{偶数}) = \Pr(2) + \Pr(4) + \Pr(6) = \frac{1}{2}$
- $\Pr(\text{出目が 3 以上}) = \Pr(3) + \Pr(4) + \Pr(5) + \Pr(6) = \frac{2}{3}$

- これで，$\Pr(P \text{ かつ } Q), \Pr(P \text{ または } Q), \Pr(P \text{ ではない})$ のような表記も可能

排反事象と独立事象

(離散) 確率空間 $(\Omega, \Pr)$

排反事象とは？

2 つの事象 A と B が排反であるとは

$$\Pr(A \cap B) = 0$$

であること

独立事象とは？

2 つの事象 A と B が独立であるとは

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

であること

独立な確率変数

(離散) 確率空間 $(\Omega, \Pr)$

確率変数の独立性とは？

確率変数 $X, Y \colon \Omega \to \mathbb{R}$ が独立であるとは，任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\Pr(X = a \text{ かつ } Y = b) = \Pr(X = a) \cdot \Pr(Y = b)$$

となること

確率の加法性

(離散) 確率空間 $(\Omega, \Pr)$

確率の加法性

事象 A, B が排反であるとき，$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$

証明：

$$\begin{aligned}
\Pr(A \cup B) &= \sum_{\omega \in A \cup B} \Pr(\omega) \\
&= \sum_{\omega \in A} \Pr(\omega) + \sum_{\omega \in B} \Pr(\omega) - \sum_{\omega \in A \cap B} \Pr(\omega) \\
&= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)
\end{aligned}$$

- A と B は排反なので，$\Pr(A \cap B) = 0$
- したがって，$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$ $\square$

確率の加法性：よく使われる形

(離散) 確率空間 $(\Omega, \Pr)$

確率の加法性

事象 A, B が排反であるとき，$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$

確率の加法性：系

事象 A, A_1, A_2 が $\Omega = A_1 \cup A_2$ と $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ を満たすとき

$$\Pr(A) = \Pr(A \cap A_1) + \Pr(A \cap A_2)$$

注：$\Pr((A \cap A_1) \cap (A \cap A_2)) = \Pr(\emptyset) = 0$

余事象の確率 (演習問題)

任意の $A \subseteq \Omega$ に対して，

$$\Pr(\Omega - A) = 1 - \Pr(A)$$

目次

条件つき確率

(離散) 確率空間 $(\Omega, \Pr)$，事象 A, B，$\Pr(B) \neq 0$

条件つき確率とは？

事象 B のもとでの A の条件つき確率とは

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

例：公平なサイコロを 1 つ振る

偶数が出たという条件のもとで 2 が出る確率は

$$\frac{\Pr(\text{偶数が出て，かつ，2 が出る})}{\Pr(\text{偶数が出る})} = \frac{\Pr(\text{2 が出る})}{\Pr(\text{偶数が出る})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

偶数が出たという条件のもとで 3 が出る確率は

$$\frac{\Pr(\text{偶数が出て，かつ，3 が出る})}{\Pr(\text{偶数が出る})} = \frac{\Pr(\emptyset)}{\Pr(\text{偶数が出る})} = 0$$

確率の加法性と条件付き確率

(離散) 確率空間 $(\Omega, \Pr)$

確率の加法性：系

事象 A, A_1, A_2 が $\Omega = A_1 \cup A_2$ と $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ を満たすとき

$$\Pr(A) = \Pr(A \cap A_1) + \Pr(A \cap A_2)$$

- ここで，$\Pr(A_1), \Pr(A_2) \neq 0$ のとき

$$\Pr(A \mid A_1) = \frac{\Pr(A \cap A_1)}{\Pr(A_1)}, \quad \Pr(A \mid A_2) = \frac{\Pr(A \cap A_2)}{\Pr(A_2)}$$

- したがって，上の仮定の下で

$$\Pr(A) = \Pr(A \mid A_1)\Pr(A_1) + \Pr(A \mid A_2)\Pr(A_2)$$

応用：モンティ・ホール問題

モンティ・ホール問題：設定

- プレイヤーの前に 3 つの扉
  - 1 つの扉の後ろ：景品の新車
  - 2 つの扉の後ろ：はずれを意味するヤギ
- プレイヤーが 1 つの扉を選択した後，
  司会者が残りの扉のうちヤギがいる扉を開けてヤギを見せる
- プレイヤーは，最初に選んだ扉を残っている開けられていない扉に変更してもよいと言われる

モンティ・ホール問題：問題

プレイヤーは扉を変更すべきだろうか？

応用：モンティ・ホール問題 — 解答編 (準備)

前提：
- 新車が各扉の後ろに置かれる確率は等しい

$$\Pr(\text{扉 1 に新車}) = \Pr(\text{扉 2 に新車}) = \Pr(\text{扉 3 に新車}) = \frac{1}{3}$$

- 司会者はどの扉の後ろに新車があるか知っている
- 司会者は後ろに新車がない扉を等確率で開く

状況
- プレイヤーが扉 1 を選択した
- 司会者が扉 2 を開いた

知りたい量：$\Pr(\text{扉 1 に新車} \mid \text{扉 2 を開いた})$

応用：モンティ・ホール問題 — 解答編 (1)

知りたい量：$\Pr(\text{扉 1 に新車} \mid \text{扉 2 を開いた})$
- まず計算

$$\begin{aligned}&\Pr(\text{扉 1 に新車} \mid \text{扉 2 を開いた})\\ &= \frac{\Pr(\text{扉 1 に新車，かつ，扉 2 を開いた})}{\Pr(\text{扉 2 を開いた})}\\ &= \frac{\Pr(\text{扉 2 を開いた} \mid \text{扉 1 に新車})\Pr(\text{扉 1 に新車})}{\Pr(\text{扉 2 を開いた})}\end{aligned}$$

- ここで，

$$\Pr(\text{扉 1 に新車}) = \frac{1}{3}$$

- よって，次の 2 つの確率が分かればよい

$$\Pr(\text{扉 2 を開いた} \mid \text{扉 1 に新車}), \quad \Pr(\text{扉 2 を開いた})$$

応用：モンティ・ホール問題 — 解答編 (2)

知りたい量：$\Pr(\text{扉 2 を開いた} \mid \text{扉 1 に新車}), \Pr(\text{扉 2 を開いた})$
- 扉 1 に新車があるという条件のもとで，扉 2 か扉 3 はそれぞれ確率 1/2 で開かれる

$$\Pr(\text{扉 2 を開いた} \mid \text{扉 1 に新車}) = \frac{1}{2}$$

- 扉 2 に新車があるという条件のもとで，扉 2 は開かれない

$$\Pr(\text{扉 2 を開いた} \mid \text{扉 2 に新車}) = 0$$

- 扉 3 に新車があるという条件のもとで，扉 2 は必ず開かれる

$$\Pr(\text{扉 2 を開いた} \mid \text{扉 3 に新車}) = 1$$

応用：モンティ・ホール問題 — 解答編 (3)

知りたい量：$\Pr(\text{扉 2 を開いた} \mid \text{扉 1 に新車}), \Pr(\text{扉 2 を開いた})$
- したがって，

$$\begin{aligned}\Pr(\text{扉 2 を開いた}) &= \Pr(\text{扉 2 を開いた} \mid \text{扉 1 に新車})\Pr(\text{扉 1 に新車}) +\\ &\quad \Pr(\text{扉 2 を開いた} \mid \text{扉 2 に新車})\Pr(\text{扉 2 に新車}) +\\ &\quad \Pr(\text{扉 2 を開いた} \mid \text{扉 3 に新車})\Pr(\text{扉 3 に新車})\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

- つまり，$\Pr(\text{扉 1 に新車} \mid \text{扉 2 を開いた})$

$$= \frac{\Pr(\text{扉 2 を開いた} \mid \text{扉 1 に新車})\Pr(\text{扉 1 に新車})}{\Pr(\text{扉 2 を開いた})} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

- つまり，$\Pr(\text{扉 3 に新車} \mid \text{扉 2 を開いた}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

扉を変更すると，当たる確率は $\frac{2}{3}$ に上がるから，変更すべき $\square$

目次

期待値

期待値とは？

確率空間 $(\Omega, \Pr)$ 上の自然数値確率変数 X の期待値とは

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr(X = i)$$

注：期待値が存在しない (発散する) 場合もある

例：公平なサイコロ

$X =$ サイコロの出目 とすると

$$\begin{aligned} E[X] &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}, \\ E[X^2] &= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6} \end{aligned}$$

条件つき期待値

条件つき期待値とは？

事象 A のもとでの X の条件つき期待値とは

$$E[X \mid A] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr(X = i \mid A)$$

例：公平なサイコロ

$X =$ サイコロの出目，$A =$ 偶数が出るという事象 とすると

$$E[X \mid A] = 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{1}{3} = 4$$

条件つき期待値

性質

全事象 Ω が A と B に分割されるとき ($\Omega = A \cup B, A \cap B = \emptyset$)

$$E[X] = E[X \mid A] \Pr(A) + E[X \mid B] \Pr(B)$$

3 つ以上の事象に分割されるときも同様

証明：

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_i i \cdot \Pr(X = i) \\ &= \sum_i i \cdot (\Pr(X = i \mid A) \Pr(A) + \Pr(X = i \mid B) \Pr(B)) \\ &= \left(\sum_i i \cdot \Pr(X = i \mid A) \right) \Pr(A) + \left(\sum_i i \cdot \Pr(X = i \mid B) \right) \Pr(B) \\ &= E[X \mid A] \Pr(A) + E[X \mid B] \Pr(B) \qquad \square \end{aligned}$$

期待値の線形性

期待値の線形性 (演習問題)

2 つの自然数値確率変数 X, Y と定数 c に対して

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y], \quad E[cX] = cE[X]$$

例：サイコロを 2 回振ったとき，
1 回目の出目を X，2 回目の出目を Y とすると

$$\begin{aligned} E[X + Y] &= E[X] + E[Y] = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7 \\ E[2X] &= 2E[X] = 2 \cdot \frac{7}{2} = 7 \\ E[X] + E[7 - X] &= E[X + (7 - X)] = E[7] = 7 \end{aligned}$$

独立確率変数の積の期待値

独立確率変数の積の期待値 (演習問題)

2 つの自然数値確率変数 X, Y が 独立 であるとき，

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$$

例：サイコロを 2 回振ったとき，
1 回目の出目を X，2 回目の出目を Y とすると
X と Y は独立なので，

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y] = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{4}$$

目次

合併上界 (和集合上界)

合併上界

事象 A, B に対して

$$\Pr(A \cup B) \leq \Pr(A) + \Pr(B)$$

証明：

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \leq \Pr(A) + \Pr(B) \qquad \square$$

単純な不等式であるが，きわめて有用

マルコフの不等式

マルコフの不等式

自然数値確率変数 $X \geq 0$ と正実数 $t > 0$ に対して，E[X] が存在するとき

$$\Pr(X \geq t) \leq \frac{\mathrm{E}[X]}{t}$$

証明：t が自然数である場合のみ示す (t が実数の場合も同様 → 演習問題)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr(X=i) \\
&= \sum_{i=0}^{t-1} \underbrace{i}_{\geq 0} \cdot \Pr(X=i) + \sum_{i=t}^{\infty} \underbrace{i}_{\geq t} \cdot \Pr(X=i) \\
&\geq \sum_{i=t}^{\infty} t \cdot \Pr(X=i) = t \sum_{i=t}^{\infty} \Pr(X=i) = t \cdot \Pr(X \geq t)
\end{aligned}$$

□

マルコフの不等式：例

例題

公平なサイコロを 100 回独立に振ったとき，
出目の総和が 500 以上になる確率は？

厳密に計算するのは骨が折れるので，簡単な上界を出す

- $X_i = i$ 回目に振ったサイコロの出目 (確率変数)
- $\boxed{\text{求めたい確率}}$：$\Pr(X_1 + \cdots + X_{100} \geq 500)$

考えるのは期待値：任意の $i \in \{1, \ldots, 100\}$ に対して

$$\mathrm{E}[X_i] = \frac{7}{2}$$

期待値の線形性から

$$\mathrm{E}[X_1 + \cdots + X_{100}] = \sum_{i=1}^{100} \mathrm{E}[X_i] = 100 \cdot \frac{7}{2} = 350$$

マルコフの不等式：例 (続き)

- したがって，マルコフの不等式から

$$\begin{aligned}
\Pr(X_1 + \cdots + X_{100} \geq 500) &\leq \frac{\mathrm{E}[X_1 + \cdots + X_{100}]}{500} \\
&= \frac{350}{500} = 0.7
\end{aligned}$$

- すなわち，出目の総和が 500 以上になる確率は 70%以下

この上界は甘すぎるので，厳しくする

マルコフの不等式：例 (上界を厳しくする)

次の量を考える：任意の $i \in \{1, \ldots, 100\}$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[2^{X_i}] &= 2^1 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^3 \cdot \frac{1}{6} + 2^4 \cdot \frac{1}{6} + 2^5 \cdot \frac{1}{6} + 2^6 \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{2+4+8+16+32+64}{6} = \frac{126}{6} = 21
\end{aligned}$$

- このとき，$X_1, \ldots, X_{100}$ は独立なので，$2^{X_1}, \ldots, 2^{X_{100}}$ も独立であり，

$$\mathrm{E}[2^{X_1+\cdots+X_{100}}] = \mathrm{E}[2^{X_1} \cdot \cdots \cdot 2^{X_{100}}] = \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{100} 2^{X_i}\right] = \prod_{i=1}^{100} \mathrm{E}[2^{X_i}] = 21^{100}$$

マルコフの不等式：例 (上界を厳しくする) 続き

- したがって，マルコフの不等式から

$$\begin{aligned}
\Pr(X_1 + \cdots + X_{100} \geq 500) &= \Pr(2^{X_1+\cdots+X_{100}} \geq 2^{500}) \\
&\leq \frac{\mathrm{E}[2^{X_1+\cdots+X_{100}}]}{2^{500}} \\
&= \frac{21^{100}}{2^{500}} < 5.09 \times 10^{-19}
\end{aligned}$$

- すなわち，出目の総和が 500 以上になる確率はとても小さい

これは「チェルノフ上界」という技法の (簡単なバージョンの) 一例

目次

今日の目標

今日の目標

確率の基礎を復習する

- 確率，条件つき確率，確率の加法性
- 期待値，条件つき期待値，期待値の線形性

確率に関する基礎的な不等式を使えるようになる

- 合併上界 (和集合上界)
- マルコフの不等式