離散数理工学 第 7 回
離散代数：対称性を考慮した数え上げ

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 11 月 25 日

最終更新：2014 年 12 月 9 日　08:23

スケジュール 前半 (予定)

1. 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/7)
- ⋆ 休講 (体育祭) (10/14)
2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/21)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/28)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/4)
5. 離散代数：群と対称性 (11/11)
6. 離散代数：部分群と軌道 (11/18)
7. 離散代数：対称性を考慮した数え上げ (11/25)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/2)
9. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/9)
- ⋆ 中間試験 (12/16)
10. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/6)
11. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/13)
12. 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/20)
- ⋆ 休講 (海外出張) (1/27)
13. 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (2/3)
- ⋆ 期末試験 (2/17?)

注意：予定の変更もありうる

中間試験

中間試験
- 日時
  - 12 月 16 日 (火)：1 限 (遅刻しないように)
- 出題範囲
  - 第 1 回から第 7 回 (今回) まで
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
  - その中の 2 題は演習問題として提示されたものと同一である
    (複数の演習問題が組み合わされて 1 題とされる可能性もある)
    (「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 15 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

今日の目標

今日の目標

群構造を用いて，対称性を考慮した数え上げができるようになる
- 軌道固定部分群定理
- コーシー・フロベニウスの定理 (バーンサイドの補題)

目次

部分群

群 $(G, \circ)$，$H \subseteq G$

部分群とは？

$(H, \circ)$ が群であるとき，H を G の部分群と呼ぶ

注意：$(G, \circ)$ と $(H, \circ)$ における演算は同一

部分群とは？: 定義の言い換え

H が G の部分群であるとは，
- $x, y \in H \Rightarrow x \circ y \in H$ (演算の保存)
- G の単位元 e に対して，$e \in H$ (単位元の保存)
- $x \in H \Rightarrow G$ における x の逆元 x^{-1} に対して $x^{-1} \in H$ (逆元の保存)

ラグランジュの定理：群に関する数え上げにおける最重要定理

ラグランジュの定理

G：有限群
H：G の部分群
$\Rightarrow$ $|H|$ は $|G|$ の約数 ($|G|/|H|$ は整数)

剰余類

群 G，部分群 $H \subseteq G$，要素 $g \in G$

H の (左) 剰余類とは？

g に関する H の (左) 剰余類とは，

$$gH = \{gh \mid h \in H\}$$

剰余類と同値分割

群 G，部分群 $H \subseteq G$

G の上の二項関係 $\sim$ を次で定義

任意の $a, b \in G$ に対して

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad aH = bH$$

これは G 上の同値関係なので，G の同値分割を与え，それを G/H と書く

つまり，

$G/H = \{gH \mid g \in G\}$ は G の分割

群の作用と軌道

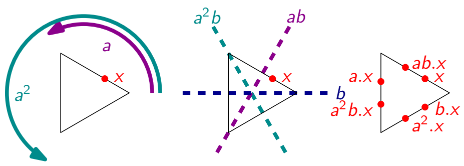
群 G が集合 X に作用

軌道とは？

要素 $x \in X$ の軌道とは，

$$G.x = \{g.x \mid g \in G\}$$

例：正三角形に作用する D_3 (回転・鏡映)



固定部分群

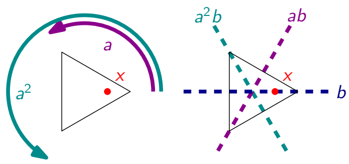
群 G が集合 X に作用

固定部分群とは？

要素 $x \in X$ の固定部分群 (または，安定化群) とは，

$$\mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid g.x = x\}$$

例：正三角形に作用する D_3 (回転・鏡映)



$$\mathrm{Stab}_{D_3}(x) = \{e, b\}$$

軌道固定部分群定理

群 G が集合 X に作用

軌道固定部分群定理 (群作用の基本定理とも呼ばれる)

任意の $x \in X$ に対して，$|G/\mathrm{Stab}_G(x)| = |G.x|$

ラグランジュの定理より，$|G|/|\mathrm{Stab}_G(x)| = |G/\mathrm{Stab}_G(x)|$ なので，

$$|G|/|\mathrm{Stab}_G(x)| = |G.x|$$

となり，すなわち，任意の $x \in X$ に対して

$$|G| = |G.x||\mathrm{Stab}_G(x)|$$

軌道固定部分群定理：使い方 (1)

例題 1

正 n 角形の回転対称性を表す群の位数は何か？

解答例：考える群を G とし，正 n 角形の 1 頂点を x とする

- このとき，$|G.x| = n$
- また，$\mathrm{Stab}_G(x) = \{e\}$ であるので，$|\mathrm{Stab}_G(x)| = 1$
- したがって，$|G| = |G.x||\mathrm{Stab}_G(x)| = n$ □

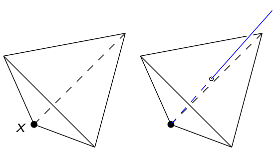
軌道固定部分群定理：使い方 (2)

例題 2

正四面体の回転対称性を表す群の位数は何か？

解答例：考える群を G とし，正四面体の 1 頂点を x とする

- G の作用により，x は正四面体の任意の頂点にうつるので，$|G.x| = 4$
- x を固定する G の作用は，x とその対面の中心を結ぶ直線の周りの回転のみなので，それは巡回群 C_3 の作用と同一視でき，$|\mathrm{Stab}_G(x)| = |C_3| = 3$
- したがって，$|G| = |G.x||\mathrm{Stab}_G(x)| = 4 \cdot 3 = 12$ □



目次

軌道固定部分群定理の証明 (1)

群 G が集合 X に作用

軌道固定部分群定理 (群作用の基本定理とも呼ばれる)

任意の $x \in X$ に対して，$|G/\mathrm{Stab}_G(x)| = |G.x|$

証明：$G/\mathrm{Stab}_G(x)$ から $G.x$ への全単射 f を構成する

f の構成

$G/\mathrm{Stab}_G(x) = \{g\mathrm{Stab}_G(x) \mid g \in G\}$ から $G.x = \{g.x \mid g \in G\}$ への写像 f を次で構成

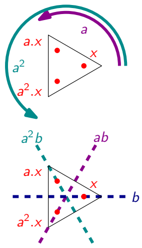
$$f(g\mathrm{Stab}_G(x)) = g.x$$

証明すべきこと

- f が写像としてちゃんと定義されていること
- f が全単射であること (全射であり，かつ，単射であること)

軌道固定部分群定理の証明：例

例：正三角形に作用する D_3 (回転・鏡映)



- $\mathrm{Stab}_{D_3}(x) = \{e, b\}$
- $\{e, b\} = e\mathrm{Stab}_{D_3}(x) = b\mathrm{Stab}_{D_3}(x)$
- $\{a, ab\} = a\mathrm{Stab}_{D_3}(x) = ab\mathrm{Stab}_{D_3}(x)$
- $\{a^2, a^2b\} = a^2\mathrm{Stab}_{D_3}(x) = a^2b\mathrm{Stab}_{D_3}(x)$
- $D_3/\mathrm{Stab}_{D_3}(x) = \{\{e, b\}, \{a, ab\}, \{a^2, a^2b\}\}$
- $D_3.x = \{x, a.x, a^2.x\}$

$$e\mathrm{Stab}_{D_3}(x) = b\mathrm{Stab}_{D_3}(x) = \{e, b\} \overset{f}{\mapsto} e.x = b.x$$
$$a\mathrm{Stab}_{D_3}(x) = ab\mathrm{Stab}_{D_3}(x) = \{a, ab\} \overset{f}{\mapsto} a.x = ab.x$$
$$a^2\mathrm{Stab}_{D_3}(x) = a^2b\mathrm{Stab}_{D_3}(x) = \{a^2, a^2b\} \overset{f}{\mapsto} a^2.x = a^2b.x$$

軌道固定部分群定理の証明 (2)：写像として成り立っていることの確認

$g\mathrm{Stab}_G(x), g'\mathrm{Stab}_G(x) \in G/\mathrm{Stab}_G(x)$ で，
$g\mathrm{Stab}_G(x) = g'\mathrm{Stab}_G(x)$ とする

- $g\mathrm{Stab}_G(x) = \{gh \mid h \in \mathrm{Stab}_G(x)\}$ かつ $e \in \mathrm{Stab}_G(x)$ なので，
  $g = ge \in g\mathrm{Stab}_G(x)$
- $g'\mathrm{Stab}_G(x) = \{g'h \mid h \in \mathrm{Stab}_G(x)\}$ なので，
  ある $h \in \mathrm{Stab}_G(x)$ に対して，$g = g'h$
- このとき，

$$\begin{aligned} g.x &= (g'h).x && (g = g'h \text{ より}) \\ &= g'.(h.x) && (\text{作用の定義より}) \\ &= g'.x && (h \in \mathrm{Stab}_G(x) \text{ より}) \end{aligned}$$

軌道固定部分群定理：証明 (全射性)

$y \in G.x$ とする

- すなわち，ある $g \in G$ が存在して，$y = g.x$
- このとき，$g\mathrm{Stab}_G(x) \in G/\mathrm{Stab}_G(x)$
- したがって，$f(g\mathrm{Stab}_G(x)) = g.x = y$

軌道固定部分群定理：証明 (単射性)

$g\mathrm{Stab}_G(x), g'\mathrm{Stab}_G(x) \in G/\mathrm{Stab}_G(x)$ とする

- $f(g\mathrm{Stab}_G(x)) = f(g'\mathrm{Stab}_G(x))$ と仮定 (すなわち，$g.x = g'.x$)
- このとき，
  $x = e.x = (g^{-1}g).x = g^{-1}.(g.x) = g^{-1}.(g'.x) = (g^{-1}g').x$
- すなわち，$g^{-1}g' \in \mathrm{Stab}_G(x)$
- $g\mathrm{Stab}_G(x) = \{gh \mid h \in \mathrm{Stab}_G(x)\}$ なので，$g' = gg^{-1}g' \in g\mathrm{Stab}_G(x)$
- 次の補題により，$g'\mathrm{Stab}_G(x) = g\mathrm{Stab}_G(x)$ □

補題

群 G，その任意の部分群 $H \subseteq G$，任意の要素 $g, g' \in G$ に対して，

$$g' \in gH \quad \Rightarrow \quad g'H = gH$$

目次

軌道に関する補題

群 G が集合 X に作用

X 上の二項関係

$x, y \in X$ に対して，$x \sim y$ であることを $G.x = G.y$ と定義する

補題 1

この二項関係 $\sim$ は X 上の同値関係，すなわち

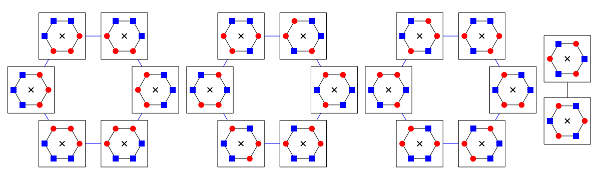
- 任意の $x \in X$ に対して，$G.x = G.x$
- 任意の $x, y \in X$ に対して，$G.x = G.y$ ならば $G.y = G.x$
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して，$G.x = G.y$ かつ $G.y = G.z$ ならば $G.x = G.z$

つまり，X は軌道によって分割される

- その分割を X/G と書く

軌道による分割：例

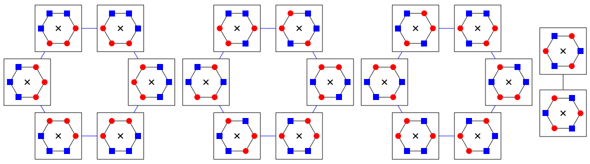
- X = 正六角形の頂点集合を赤 3 つ青 3 つで塗る方法全体の集合
- C_6 は X に作用する (回転対称性)



$|X| = \binom{6}{3} = 20$

軌道による分割：例

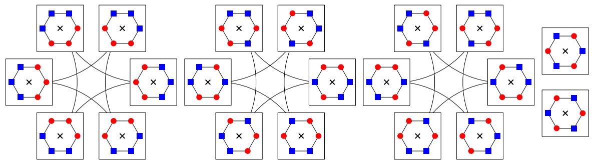
- X = 正六角形の頂点集合を赤 3 つ青 3 つで塗る方法全体の集合
- C_6 は X に作用する



60 度回転による作用 $\rightsquigarrow$ 4 個の軌道に分割

軌道による分割：例

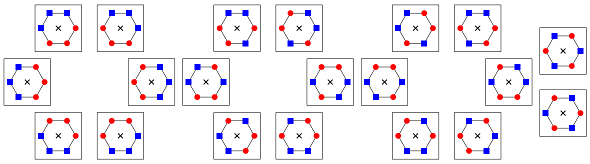
- X = 正六角形の頂点集合を赤 3 つ青 3 つで塗る方法全体の集合
- C_6 は X に作用する



120 度回転による作用 $\rightsquigarrow$ 8 個の軌道に分割

軌道による分割：例

- X = 正六角形の頂点集合を赤 3 つ青 3 つで塗る方法全体の集合
- C_6 は X に作用する

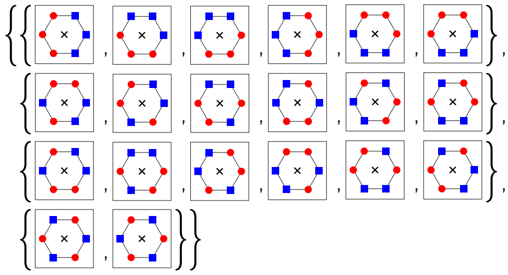


0 度回転による作用 $\rightsquigarrow$ 20 個の軌道に分割

軌道による分割：例

- X = 正六角形の頂点集合を赤 3 つ青 3 つで塗る方法全体の集合
- C_6 は X に作用する

$X/C_6 =$

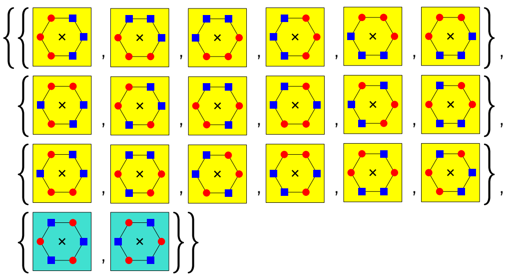


$|X/C_6|$ が異なるネックレスの総数 (回転を考慮した数え上げ)

軌道による分割：例

- X = 正六角形の頂点集合を赤 3 つ青 3 つで塗る方法全体の集合
- C_6 は X に作用する

$X/C_6 =$

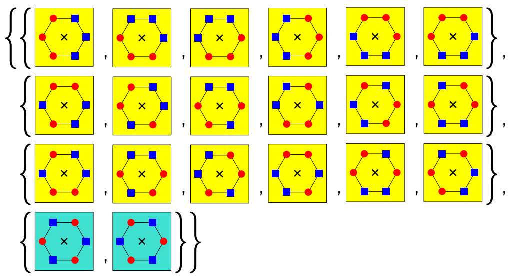


$|\mathrm{Stab}_{C_6}(\boxed{\times})| = 1$, $|\mathrm{Stab}_{C_6}(\boxed{\times})| = 3$

軌道による分割：例

- X = 正六角形の頂点集合を赤 3 つ青 3 つで塗る方法全体の集合
- C_6 は X に作用する

$X/C_6 =$

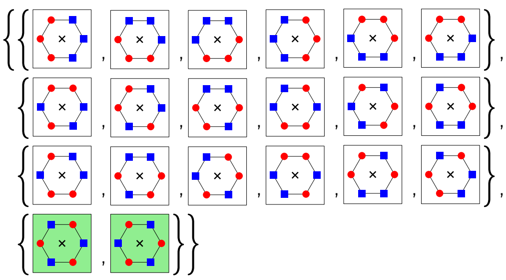


$\frac{1}{|C_6|}(1 \cdot 18 + 3 \cdot 2) = \frac{1}{6}(18 + 6) = \frac{24}{6} = 4 = |X/C_6|$

軌道による分割：例

- X = 正六角形の頂点集合を赤 3 つ青 3 つで塗る方法全体の集合
- C_6 は X に作用する

$X/C_6 =$

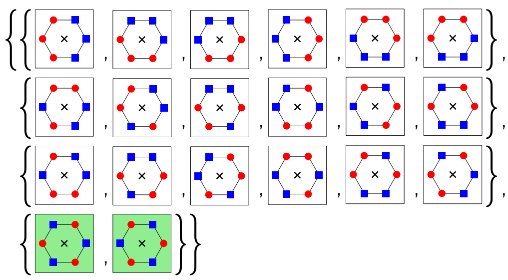


120 度の回転により変わらない塗り方は 2 個

軌道による分割：例

- X = 正六角形の頂点集合を赤 3 つ青 3 つで塗る方法全体の集合
- C_6 は X に作用する

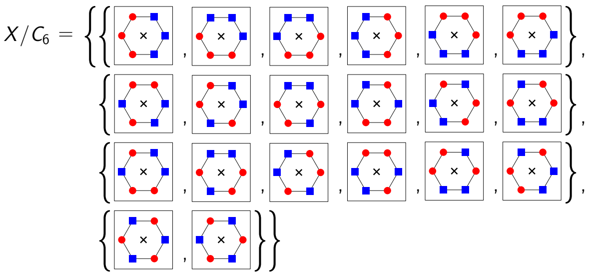
$X/C_6 =$



240 度の回転により変わらない塗り方は 2 個

軌道による分割：例

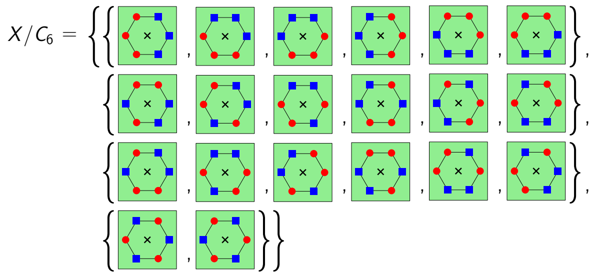
- $X =$ 正六角形の頂点集合を赤 3 つ青 3 つで塗る方法全体の集合
- C_6 は X に作用する



60 度，180 度，300 度の回転により変わらない塗り方は 0 個

軌道による分割：例

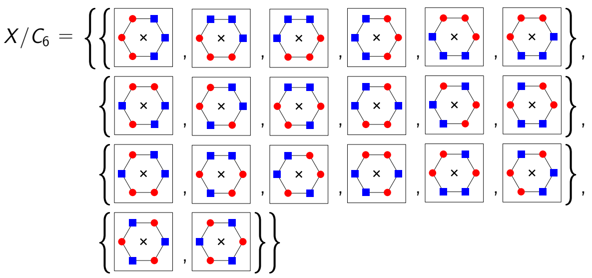
- $X =$ 正六角形の頂点集合を赤 3 つ青 3 つで塗る方法全体の集合
- C_6 は X に作用する



0 度の回転により変わらない塗り方は 20 個

軌道による分割：例

- $X =$ 正六角形の頂点集合を赤 3 つ青 3 つで塗る方法全体の集合
- C_6 は X に作用する



$\frac{1}{|C_6|}(2+2+0\cdot 3+20) = \frac{24}{6} = 4 = |X/C_6|$

不動点集合

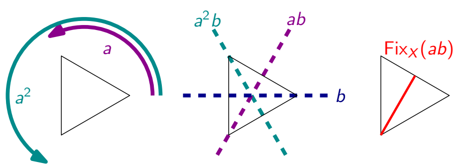
群 G が集合 X に作用

不動点集合とは？

要素 $g \in G$ の不動点集合とは，

$$\mathrm{Fix}_X(g) = \{x \in X \mid g.x = x\}$$

例：正三角形に作用する D_3 (回転・鏡映)



$\mathrm{Fix}_X(ab)$ は赤い線分，$\mathrm{Fix}_X(a) = \emptyset$

コーシー・フロベニウスの定理

有限群 G が有限集合 X に作用

コーシー・フロベニウスの定理

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}|\mathrm{Stab}_G(x)| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}_X(g)|$$

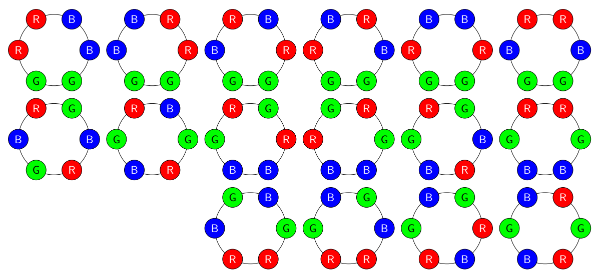
バーンサイドの補題，軌道数え上げ定理，などとも呼ばれる

コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (1)

問題

6 個の石を持つネックレスで，その石の色が
赤 2 つ，青 2 つ，緑 2 つのものの総数は何か？

ネックレス $=$ 回転して同じものは同じと見なす



16

コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (1)

問題

6 個の石を持つネックレスで，その石の色が
赤 2 つ，青 2 つ，緑 2 つのものの総数は何か？

石を正六角形の頂点に置くものとする

- 対称性を考慮しない塗り方の総数 $= \binom{6}{2}\binom{4}{2} = 15\cdot 6 = 90$

考える対称性を表す群は C_6

- $|C_6| = 6$
- C_6 の要素は 0 度，60 度，120 度，180 度，240 度，300 度の回転を表す

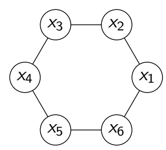
コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (1)

問題

6 個の石を持つネックレスで，その石の色が
赤 2 つ，青 2 つ，緑 2 つのものの総数は何か？

正六角形の頂点の色を反時計回り順に $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする

- 0 度回転によって変わらない塗り方の総数 $= 90$



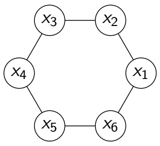
コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (1)

問題

6 個の石を持つネックレスで，その石の色が
赤 2 つ，青 2 つ，緑 2 つのものの総数は何か？

正六角形の頂点の色を反時計回り順に $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする

- 60 度回転によって変わらない塗り方の総数は？
- そのような塗り方において，
  $x_1 = x_2, x_2 = x_3, x_3 = x_4, x_4 = x_5, x_5 = x_6, x_6 = x_1$
- つまり，総数 $= 0$



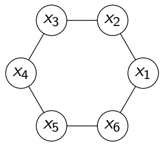
コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (1)

問題

6 個の石を持つネックレスで，その石の色が
赤 2 つ，青 2 つ，緑 2 つのものの総数は何か？

正六角形の頂点の色を反時計回り順に $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする

- 120 度回転によって変わらない塗り方の総数は？
- そのような塗り方において，
  $x_1 = x_3, x_2 = x_4, x_3 = x_5, x_4 = x_6, x_5 = x_1, x_6 = x_2$
- つまり，総数 $= 0$



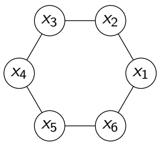
コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (1)

問題

6 個の石を持つネックレスで，その石の色が
赤 2 つ，青 2 つ，緑 2 つのものの総数は何か？

正六角形の頂点の色を反時計回り順に $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする

- 180 度回転によって変わらない塗り方の総数は？
- そのような塗り方において，
  $x_1 = x_4, x_2 = x_5, x_3 = x_6, x_4 = x_1, x_5 = x_2, x_6 = x_3$
- つまり，総数 $= 3 \cdot 2 = 6$



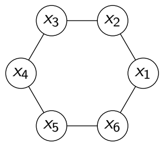
コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (1)

問題

6 個の石を持つネックレスで，その石の色が
赤 2 つ，青 2 つ，緑 2 つのものの総数は何か？

正六角形の頂点の色を反時計回り順に $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする

- 240 度回転によって変わらない塗り方の総数は？
- そのような塗り方において，
  $x_1 = x_5, x_2 = x_6, x_3 = x_1, x_4 = x_2, x_5 = x_3, x_6 = x_4$
- つまり，総数 $= 0$



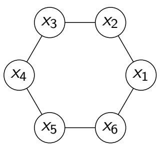
コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (1)

問題

6 個の石を持つネックレスで，その石の色が
赤 2 つ，青 2 つ，緑 2 つのものの総数は何か？

正六角形の頂点の色を反時計回り順に $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする

- 300 度回転によって変わらない塗り方の総数は？
- そのような塗り方において，
  $x_1 = x_6, x_2 = x_1, x_3 = x_2, x_4 = x_3, x_5 = x_4, x_6 = x_5$
- つまり，総数 $= 0$



コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (1)

問題

6 個の石を持つネックレスで，その石の色が
赤 2 つ，青 2 つ，緑 2 つのものの総数は何か？

- 0 度回転によって変わらない塗り方の総数 $= 90$
- 60 度回転によって変わらない塗り方の総数 $= 0$
- 120 度回転によって変わらない塗り方の総数 $= 0$
- 180 度回転によって変わらない塗り方の総数 $= 6$
- 240 度回転によって変わらない塗り方の総数 $= 0$
- 300 度回転によって変わらない塗り方の総数 $= 0$

コーシー・フロベニウスの定理により

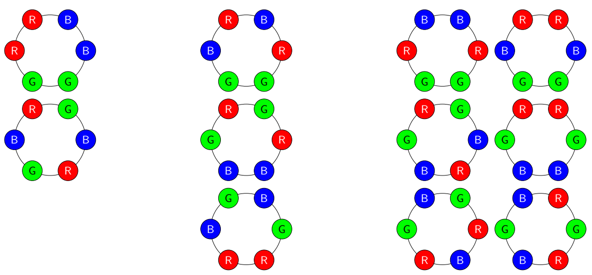
$$\text{総数} = \frac{1}{6}(90 + 0 + 0 + 6 + 0 + 0) = \frac{96}{6} = 16$$

コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (2)

問題

6 個の石を持つブレスレットで，その石の色が
赤 2 つ，青 2 つ，緑 2 つのものの総数は何か？

ブレスレット ＝ 回転や鏡映 (裏返し) によって同じものは同じと見なす



11

コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (2)

問題

6 個の石を持つブレスレットで，その石の色が
赤 2 つ，青 2 つ，緑 2 つのものの総数は何か？

石を正六角形の頂点に置くものとする

- 対称性を考慮しない塗り方の総数 $= \binom{6}{2}\binom{4}{2} = 15 \cdot 6 = 90$

考える対称性を表す群は二面体群 D_6

- $|D_6| = 12$
- D_6 の要素は 0 度，60 度，120 度，180 度，240 度，300 度の回転のほか，6 個の鏡映変換を表す

回転に関して変わらない塗り方はネックレスの場合と同じ

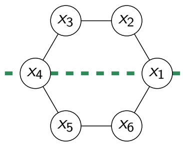
コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (2)

問題

6 個の石を持つブレスレットで，その石の色が
赤 2 つ，青 2 つ，緑 2 つのものの総数は何か？

正六角形の頂点の色を反時計回り順に $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする

- 図のように 2 頂点を通る軸に関する鏡映によって変わらない塗り方の総数は？
- そのような塗り方において，$x_2 = x_6, x_3 = x_5$
- つまり，$x_1 = x_4$ でなければならず，総数 $= 3 \cdot 2 = 6$



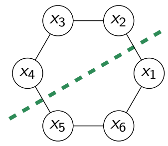
コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (2)

問題

6 個の石を持つブレスレットで，その石の色が
赤 2 つ，青 2 つ，緑 2 つのものの総数は何か？

正六角形の頂点の色を反時計回り順に $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする

- 図のように 2 辺の中点を通る軸に関する鏡映によって変わらない塗り方の総数は？
- そのような塗り方において，$x_1 = x_2, x_3 = x_6, x_4 = x_5$
- つまり，総数 $= 3 \cdot 2 = 6$



コーシー・フロベニウスの定理：使い方 (2)

問題

6 個の石を持つブレスレットで，その石の色が
赤 2 つ，青 2 つ，緑 2 つのものの総数は何か？

コーシー・フロベニウスの定理により

$$\text{総数} = \frac{1}{12}(90 + 0 + 0 + 6 + 0 + 0 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 3) = \frac{132}{12} = 11$$

目次

コーシー・フロベニウスの定理

有限群 G が有限集合 X に作用

コーシー・フロベニウスの定理

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}_G(x)| = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_X(g)|$$

バーンサイドの補題，軌道数え上げ定理，などとも呼ばれる

コーシー・フロベニウスの定理：証明

補題 1 によって得られる軌道による X の分割が次にように書けるとする

$$X = G.x_1 \cup \cdots \cup G.x_m \qquad (\text{つまり}, |X/G| = m)$$

- 軌道固定部分群定理とラグランジュの定理より，任意の $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対して，$|G|/|\mathrm{Stab}_G(x_i)| = |G.x_i|$
- すなわち，$|\mathrm{Stab}_G(x_i)| = \dfrac{|G|}{|G.x_i|}$
- 補題 2 より，任意の $x \in G.x_i$ に対して，$|\mathrm{Stab}_G(x)| = |\mathrm{Stab}_G(x_i)|$
- したがって，任意の $x \in G.x_i$ に対して，$|\mathrm{Stab}_G(x)| = \dfrac{|G|}{|G.x_i|}$

補題 2 (演習問題)

$x, y \in X$ に対して，$y \in G.x$ ならば，$|\mathrm{Stab}_G(x)| = |\mathrm{Stab}_G(y)|$

コーシー・フロベニウスの定理：証明

- すなわち，$\displaystyle\sum_{x \in G.x_i} |\mathrm{Stab}_G(x)| = \sum_{x \in G.x_i} \frac{|G|}{|G.x_i|} = |G.x_i| \frac{|G|}{|G.x_i|} = |G|$
- したがって，$\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{x \in G.x_i} |\mathrm{Stab}_G(x)| = |G|m$
- ここで，X は $G.x_1, \ldots, G.x_m$ によって分割されているので，

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{x \in G.x_i} |\mathrm{Stab}_G(x)| = \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}_G(x)|$$

- したがって，$m = \dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}_G(x)|$

コーシー・フロベニウスの定理：証明

証明すべきこと

$$\sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}_G(x)| = \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_X(g)|$$

次の量を数える：$|\{(x, g) \in X \times G \mid g.x = x\}|$

$$\begin{aligned} |\{(x, g) \in X \times G \mid g.x = x\}| &= \sum_{x \in X} |\{g \in G \mid g.x = x\}| \\ &= \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}_G(x)| \\ |\{(x, g) \in X \times G \mid g.x = x\}| &= \sum_{g \in G} |\{x \in X \mid g.x = x\}| \\ &= \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_X(g)| \end{aligned}$$

したがって，$\displaystyle\sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}_G(x)| = \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}_X(g)|$ □

目次

今日の目標

今日の目標

群構造を用いて，対称性を考慮した数え上げができるようになる
- 軌道固定部分群定理
- コーシー・フロベニウスの定理 (バーンサイドの補題)