

離散数理工学 第4回
数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014年11月4日

最終更新：2014年11月21日 10:02

スケジュール 後半 (予定)

- 8 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/2)
- 9 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/9)
 - * 中間試験 (12/16)
- 10 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/6)
- 11 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/13)
- 12 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/20)
 - * 休講 (海外出張) (1/27)
- 13 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (2/3)
 - * 期末試験 (2/17?)

注意：予定の変更もありうる

母関数

目次

- 1 母関数
- 2 線形漸化式の厳密解法
- 3 カタラン数：定義と導出
- 4 カタラン数：組合せ的解釈
- 5 今日のまとめ

母関数

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 1$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 2^n$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$$

一般に, $a_n = \alpha^n$ で定められる数列の母関数は $\frac{1}{1-\alpha x}$

スケジュール 前半 (予定)

- 1 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/7)
 - * 休講 (体育祭) (10/14)
- 2 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/21)
- 3 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/28)
- 4 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/4)
- 5 離散代数：群と対称性 (11/11)
- 6 離散代数：部分群と軌道 (11/18)
- 7 離散代数：対称性を考慮した数え上げ (11/25)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる

- ▶ 線形漸化式の解法
- ▶ カタラン数

母関数

数列の母関数

母関数とは？

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ の母関数とは冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

のこと (x は複素数)

仮定

この冪級数は収束する

- ▶ 特に, ある定数 $r > 0$ が存在して $|x| < r$ のとき収束するとする
- ▶ つまり, $|x| < r$ のとき, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は well-defined

収束するので, 微分積分学や複素関数論の知識が使える

母関数

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = n$ とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n \\ &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

数列 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ... の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 3n + 1$ とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (3n+1)x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{2x+1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

道 — まとめ

(第 2 回講義より)

$a_n =$ グラフ P_n における独立集合の総数 とする

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n=2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

- ▶ 特性方程式を用いた方法 (前回)
- ▶ 行列を用いた方法 (前回)
- ▶ 母関数を用いた方法 (今回)

便宜上, $a_0 = 1$ とする

(このとき, $n \geq 2$ に対して, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ が成立)

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - 2x \\ \text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\ &= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 \right) + x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\ &= xA(x) - x + x^2 A(x) \end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = -\frac{x+1}{x^2+x-1}$$

このとき, $-\frac{x+1}{x^2+x-1}$ の部分分数分解が必要

- ▶ 「分母 = 0」を x について解くと, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ となる
- ▶ したがって, ある定数 a, b が存在して

$$-\frac{x+1}{x^2+x-1} = \frac{a}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

- ▶ この a, b を定める (次のページ)

- 1 母関数
- 2 線形漸化式の厳密解法
- 3 カタラン数：定義と導出
- 4 カタラン数：組合せ的解释
- 5 今日のまとめ

母関数を用いた漸化式の解法

1 両辺に x^n を掛けて, 級数を作る

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_n x^n &= a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n \\ \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \end{aligned}$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 - 2x &= xA(x) - x + x^2 A(x) \\ (x^2 + x - 1)A(x) &= -x - 1 \\ A(x) &= -\frac{x+1}{x^2+x-1} \end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

$$\begin{aligned} -\frac{x+1}{x^2+x-1} &= \frac{a}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\ -(x+1) &= a \left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) + b \left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) \\ -x-1 &= (a+b)x + \left(-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}b \right) \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} -1 &= a + b, \text{ かつ} \\ -1 &= -\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}b \end{aligned}$$

これを a, b に関して解くと

$$a = \frac{-5-\sqrt{5}}{10}, \quad b = \frac{-5+\sqrt{5}}{10}$$

したがって、

$$\begin{aligned} A(x) &= -\frac{x+1}{x^2+x-1} = -\frac{5+\sqrt{5}}{10} \frac{1}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{5-\sqrt{5}}{10} \frac{1}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x} \\ &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n x^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \right) x^n \end{aligned}$$

したがって、任意の $n \geq 0$ に対して、

$$a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$$

カタラン数

カタラン数とは？

次の漸化式で定められる数 C_n を第 n **カタラン数** と呼ぶ

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n=0 \text{ のとき}) \\ \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例：

- ▶ $C_1 = C_0 C_0 = 1 \cdot 1 = 1$
- ▶ $C_2 = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$
- ▶ $C_3 = C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$
- ▶ $C_4 = C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$

目標：第 n カタラン数を表す式を母関数による方法で導く

カタラン数：母関数による解法

② 各辺を $C(x)$ によって表す

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n - C_0 = C(x) - 1 \\ \text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(x \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \right) \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} x^n \end{aligned}$$

カタラン数：母関数による解法

③ 得られた式を $C(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} C(x) - 1 &= xC(x)^2 \\ xC(x)^2 - C(x) + 1 &= 0 \\ C(x) &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \end{aligned}$$

どちらが正しいのか？

目次

- ① 母関数
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ カタラン数：定義と導出
- ④ カタラン数：組合せの解釈
- ⑤ 今日のまとめ

カタラン数：母関数による解法

① 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \\ C_n x^n &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \right) x^n \\ &= x \sum_{i=0}^{n-1} (C_i C_{n-i-1} x^{n-1}) \\ \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(x \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \right) \end{aligned}$$

母関数を $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ と書くことにする

カタラン数：母関数による解法

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} x^n \\ &= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n \\ &= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j} \\ &= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_i x^i C_j x^j \\ &= x \left(\sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j x^j \right) = xC(x)^2 \end{aligned}$$

カタラン数：母関数による解法

ここで、 $\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = C_0 = 1$ なので、

▶ $C(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x}$ だとすると、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x} = \infty$$

となり、合わない

▶ $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ だとすると、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1-4x)}{2x(1 + \sqrt{1-4x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1 + \sqrt{1-4x}} = 1$$

となり、合う

したがって、 $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ である

3 得られた $C(x)$ の級数展開を導く

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

$$xC(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

ここで、 $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ なので、

$$xC(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^n$$

つまり、 $xC(x)$ は次の数列 $\{a_n\}$ の母関数

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n=0 \text{ のとき}) \\ C_{n-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

まずは、 $xC(x)$ の級数展開を導く

$$\begin{aligned} \therefore xC(x) &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \binom{1/2}{n} (-4)^n \right) x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\text{任意の } n \geq 1 \text{ に対して } C_{n-1} = -\frac{1}{2} \binom{1/2}{n} (-4)^n$$

以上の議論より、任意の $n \geq 1$ に対して、

$$C_{n-1} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$$

つまり、次の公式が得られる

カタラン数の公式

任意の $n \geq 0$ に対して

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

- 1 母関数
- 2 線形漸化式の厳密解法
- 3 カタラン数：定義と導出
- 4 カタラン数：組合せ的解释
- 5 今日のまとめ

補題 (テイラー展開を使うことで証明できる (証明は省略))

任意の実数 α に対して、 $|x| < 1$ であるとき、

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

ただし、

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & (n=0 \text{ のとき}) \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

すなわち、

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \binom{1/2}{n} (-4)^n &= -\frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-4)^n \\ &= \frac{1}{2} \frac{-2(-2+4)(-2+8)\cdots(-2+4n-4)}{n!} \\ &= \frac{2 \cdot 6 \cdots (4n-6)}{n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{n!} 2^{n-1} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{n!} 2^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{n!} 2^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{(n-1)!} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{n!} 2 \cdot 4 \cdots (2n-2) \\ &= \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{n} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \end{aligned}$$

カタラン数の公式

任意の $n \geq 0$ に対して

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

二項係数：簡単な評価 (復習)

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して、 $a \geq b$ であるとき、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$$

したがって、カタラン数に対する以下の上界と下界が得られる

$$\frac{2^n}{n+1} \leq C_n \leq \frac{(2e)^n}{n+1}$$

\therefore カタラン数は指数関数的に増加する



リチャード・スタンレイ

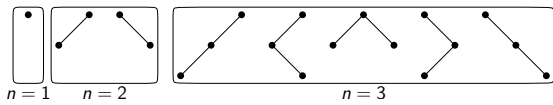
- ▶ MIT 数学科の教授
- ▶ 組合せ論の研究者 (大家)
- ▶ カタラン数の組合せ的解释を 207 個収集した (書籍出版予定)

ここでは 2 つだけ紹介

二分木とは？

頂点数 n の二分木とは、次のように再帰的に定義されるグラフ

- ▶ 頂点数 0 の二分木は空グラフ (頂点を持たないグラフ)
- ▶ 頂点数 1 の二分木は根と呼ばれる 1 頂点から成るグラフ
- ▶ 頂点数 $n \geq 2$ の二分木は、根 r と呼ばれる 1 頂点と、左部分木、右部分木と呼ばれる 2 つの二分木から成り、頂点数の総和は n であり、 r と左部分木の根、 r と右部分木の根を辺で結んだもの



T_n が満たす漸化式

$$T_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \sum_{i=0}^{n-1} T_i T_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

証明： $n \geq 1$ のとき、

- ▶ 左部分木の頂点数 + 右部分木の頂点数 = $n - 1$
- ▶ 左部分木の頂点数を i とすると、 $i \in \{0, \dots, n-1\}$ で、右部分木の頂点数は $n - i - 1$
- ▶ このとき、左部分木は T_i 通り、右部分木は T_{n-i-1} 通りの可能性 □

結論

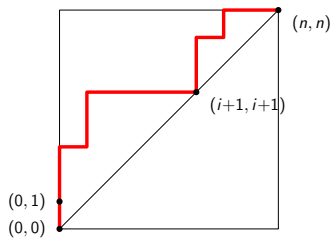
頂点数 n の二分木の総数は第 n カタラン数 C_n と等しい

ダイク道の総数が満たす漸化式

$$D_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \sum_{i=0}^{n-1} D_i D_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

証明： $n \geq 1$ のとき

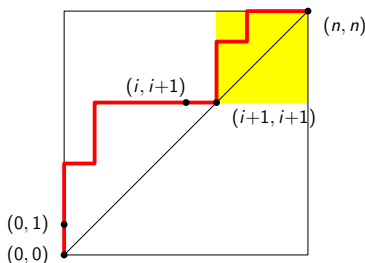
- ▶ 「はじめの一步」は必ず「上」
- ▶ $(0, 0)$ の他に、はじめて直線 $y = x$ に来るときを考える
- ▶ その点を $(i+1, i+1)$ とする ($i \in \{0, \dots, n-1\}$)



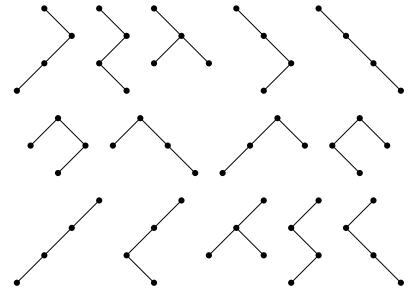
証明 (続き) :

④ $(i+1, i+1)$ から (n, n) に至る
この間に $y = x$ より下に行かないので、

このような経路の総数 = $(0, 0)$ から $(n-i-1, n-i-1)$ に至るダイク道の総数 = D_{n-i-1}



$n = 4$ のとき

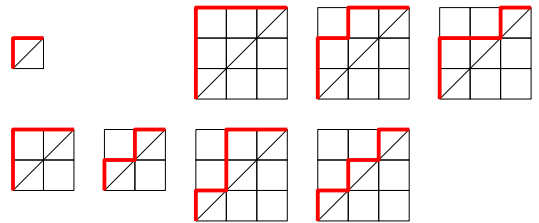


目標

頂点数 n の二分木の総数 T_n の満たす漸化式を導く

ダイク道とは？

ダイク道とは、 $(0, 0)$ から (n, n) へ至る格子道で、直線 $y = x$ の下側を通らないもの

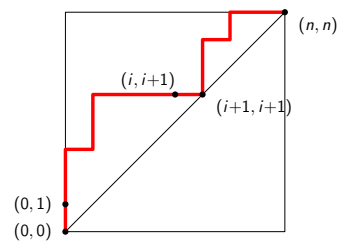


$D_n = (0, 0)$ から (n, n) へ至るダイク道の総数

証明 (続き) :

- ▶ $(i+1, i+1)$ に来る直前に、必ず $(i, i+1)$ にいる
- ▶ つまり、考えているダイク道は以下の形をしている

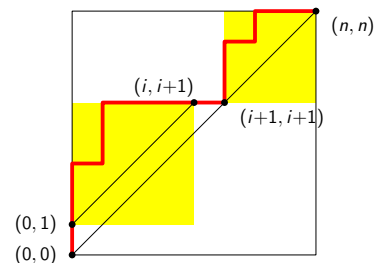
- ① $(0, 0)$ から $(0, 1)$ に至る (← 1 通り)
- ② $(0, 1)$ から $(i, i+1)$ に至る
- ③ $(i, i+1)$ から $(i+1, i+1)$ に至る (← 1 通り)
- ④ $(i+1, i+1)$ から (n, n) に至る



証明 (続き) :

② $(0, 1)$ から $(i, i+1)$ に至る
この間に $y = x$ 上に来ないので、

このような経路の総数 = $(0, 0)$ から (i, i) に至るダイク道の総数 = D_i



証明 (続き) :

- ▶ $(i+1, i+1)$ に来る直前に、必ず $(i, i+1)$ にいる
- ▶ つまり、考えているダイク道は以下の形をしている
 - 1 $(0, 0)$ から $(0, 1)$ に至る ($\leftarrow 1$ 通り)
 - 2 $(0, 1)$ から $(i, i+1)$ に至る ($\leftarrow D_i$ 通り)
 - 3 $(i, i+1)$ から $(i+1, i+1)$ に至る ($\leftarrow 1$ 通り)
 - 4 $(i+1, i+1)$ から (n, n) に至る ($\leftarrow D_{n-i-1}$ 通り)

したがって、 $D_n = \sum_{i=0}^{n-1} D_i D_{n-i-1}$ □

結論

$(0, 0)$ から (n, n) へ至るダイク道の総数は第 n カタラン数 C_n に等しい

- ① 母関数
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ カタラン数：定義と導出
- ④ カタラン数：組合せ的解釈
- ⑤ 今日のまとめ

今日の目標

今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる

- ▶ 線形漸化式の解法
- ▶ カタラン数

注意

今日扱ったのは、母関数に関する初歩

- ▶ 母関数にまつわる理論は膨大
- ▶ 近年では「解析的組合せ論」という分野に成長