離散数理工学　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**2015 年 2 月 17 日**
期末試験　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　岡本 吉央

9:00–10:30．A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可．
携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．

採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．
採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと．(その文字列は覚えておくように．) 採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．

問題 1. 任意の自然数値確率変数 X, Y に対して，

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{E}[X \mid Y = i] \Pr(Y = i)$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，$\mathbb{N}$ は自然数全体の集合を表し，$\Pr(Y = i) = 0$ のとき，

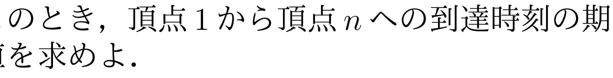
$$\mathrm{E}[X \mid Y = i] \Pr(Y = i) = 0$$

とする．

問題 2. 表の出る確率が p であり，裏の出る確率が $1 - p$ であるような硬貨を考える．ただし，$0 < p \leq 1$ である．この硬貨を続けて何回か独立に投げることを考える．以下の問いに答えよ．

1. n 回硬貨を投げたとき，表の出る回数を表す確率変数を X とする．定数 $c > 1$ に対して $\mathrm{E}[c^X]$ が何であるか，答えよ．
2. 次の不等式を証明せよ．
$$\Pr(X \geq 2pn) \leq \left(\frac{1 + (c-1)p}{c^{2p}} \right)^n .$$
3. $p = 1/4$ のとき，この右辺を最小とする c を求めよ．(注意：上の小問が解けていなくても，この小問に解答してよい．)

問題 3. 次の図で表されるグラフ上のランダムウォークを考える．これは頂点数 n の道である．



このとき，頂点 1 から頂点 n への到達時刻の期待値を求めよ．

問題 4. 次の疑似コードで記述される乱択アルゴリズムを考える．入力 n は 1 以上の整数であり，出力は必ず 1 となる．

```
1: def f(n) # n: a positive integer
2:   return n if n == 1
3:   print "G"
4:   p = an integer between 1 & n-1,
         chosen uniformly at random
5:   return f(p)
6: end
```

4 行目では，1 から $n-1$ の間の整数 (1 と $n-1$ も含む) を等確率で 1 つ選び，p としている．つまり，任意の $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対して

$$\Pr(p = i) = \frac{1}{n-1}$$

となる．

1. 整数 n を入力としたときに画面に書かれる `G` の数を X_n で表す．このとき，$\mathrm{E}[X_1] = 0$ であることを証明せよ．
2. $n \geq 2$ であるとき，
$$\mathrm{E}[X_n] = 1 + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{E}[X_i]$$
が成り立つことを証明せよ．
3. 任意の整数 $n \geq 2$ に対して，
$$\mathrm{E}[X_n] = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$$
が成り立つことを証明せよ．(注意：小問 1, 2 が解けていなくても，その内容が正しいことを仮定して，この小問に解答してよい．)

以上