

提出締切：2014 年 11 月 11 日

復習問題 4.1 次の数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の母関数が何であるか，答えよ。

1. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して， $a_n = 1$.
2. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して， $a_n = 2^n$.
3. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して， $a_n = n$.
4. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して， $a_n = 3n + 1$.

復習問題 4.2 次の漸化式を考える。

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ。(ヒント：便宜上， $a_0 = 1$ とするとよい.)

発展復習問題 4.3 次の漸化式を考える。

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，任意の $n \geq 0$ に対して

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

が成り立つことを証明せよ。

復習問題 4.4 頂点数 n の二分木の総数が第 n カタラン数 C_n と等しいことを証明せよ。

復習問題 4.5 $(0, 0)$ から (n, n) へ至るダイク道の総数が第 n カタラン数 C_n と等しいことを証明せよ。

追加問題 4.6 次の漸化式を考える。

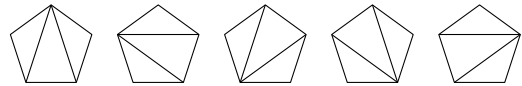
$$t_n = \begin{cases} 5 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 24 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ 4t_{n-1} + 4t_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{t_n\}_{n \geq 1}$ の一般項 t_n を閉じた形で与えよ。(ヒント： $t_n = \frac{4-3\sqrt{2}}{8}(2-2\sqrt{2})^n + \frac{4+3\sqrt{2}}{8}(2+2\sqrt{2})^n$. 便宜上， $t_0 = 1$ とするとよい.)

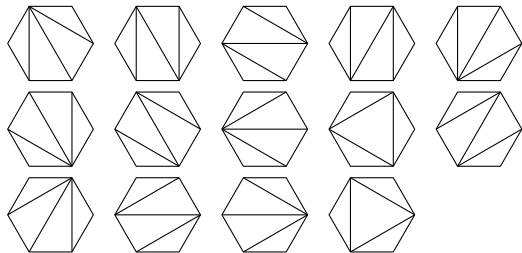
追加問題 4.7 n 個の左括弧と n 個の右括弧を 1 列に並べるとき，括弧の対応付けが取れている場合のみを考える。例えば， $n = 3$ のとき「 $((())())$ 」は対応付けが取れている並べ方であるが，「 $(())(())$ 」は対応付けが取れていない並べ方である。つまり，左から順に見ていき，常に左括弧の数が右括弧の数以上になっている場合，その並べ方は括弧の対応付けが取れていると呼ぶ。

n 個の左括弧と n 個の右括弧を対応付けが取れるように並べる方法の総数が第 n カタラン数 C_n に等しいことを証明せよ。

追加問題 4.8 正 n 角形の三角形分割の総数を考える。例えば， $n = 5$ の場合，次の図の通り，三角形分割の総数は 5 である。



$n = 6$ の場合，次の図の通り，総数は 14 となる。



正 n 角形の三角形分割の総数が第 $n-2$ カタラン数 C_{n-2} に等しいことを証明せよ。