離散数学 第 13 回
集合の記法 (3)：集合の再帰的定義

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 8 月 5 日

最終更新：2014 年 8 月 7 日　10:53

スケジュール 前半

1. 証明法 (1)：「〜が存在する」ことの証明 (4 月 8 日)
2. 証明法 (2)：「任意の〜に対して…である」ことの証明 (4 月 15 日)
3. 証明法 (3)：「〜ならば…である」ことの証明 (4 月 22 日)

- ⋆ 休み (祝日) (4 月 29 日)
- ⋆ 休み (振替休日) (5 月 6 日)

4. 集合の記法 (1)：外延的記法と内包的記法 (5 月 13 日)
5. 集合の記法 (2)：直積と冪集合 (5 月 20 日)
6. 証明法 (4)：集合に関する証明 (5 月 27 日)
7. 関数 (1)：像と逆像 (6 月 3 日)

- 中間試験 (6 月 10 日)

スケジュール 後半

8. 関数 (2)：全射と単射 (6 月 17 日)
- ⋆ 休講 (海外出張) (6 月 24 日)
- ⋆ 休講 (海外出張) (7 月 1 日)
9. 関係 (1)：関係 (7 月 8 日)
10. 関係 (2)：同値関係 (7 月 15 日)
11. 関係 (3)：順序関係 (7 月 22 日)
12. 証明法 (5)：数学的帰納法 (7 月 29 日)
13. 集合の記法 (3)：集合の再帰的定義 (8 月 5 日)
- 期末試験 (8 月 12 日)

今日の概要

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 再帰的定義を通して，関数の冪乗を理解する
- 集合を再帰的に定義する方法を理解する

目次

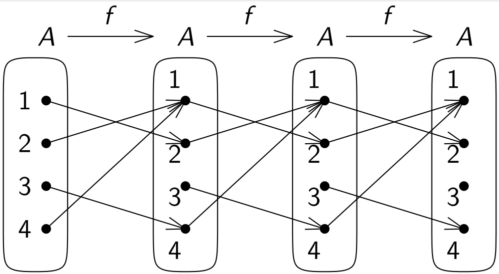
関数の冪乗

集合 A と関数 $f\colon A \to A$

関数の冪乗とは？

0 以上の整数 n に対して f の**冪乗** $f^n\colon A \to A$ を次で定義する

$$f^n = \begin{cases} \mathrm{id}_A & (n = 0 \text{ のとき}) \\ f \circ f^{n-1} & (n > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$



- $f(1) = 2,\ f(2) = 1,$ $f(3) = 4,\ f(4) = 1$
- $f^2(1) = 1,\ f^2(2) = 2,$ $f^2(3) = 1,\ f^2(4) = 2$
- $f^3(1) = 2,\ f^3(2) = 1,$ $f^3(3) = 2,\ f^3(4) = 1$

関数の冪乗：例題

例題 1

関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = 2x^2$$

と定義する．このとき，任意の正の整数 n に対して

$$f^n(x) = 2^{2^n-1}x^{2^n}$$

が成り立つことを証明せよ

確認

- $n = 2$ のとき：$f^2(x) = f(2x^2) = 2(2x^2)^2 = 2^3x^4$
- $n = 3$ のとき：$f^3(x) = f(2^3x^4) = 2(2^3x^4)^2 = 2^7x^8$
- $n = 4$ のとき：$f^4(x) = f(2^7x^8) = 2(2^7x^8)^2 = 2^{15}x^{16}$
- ...

関数の冪乗：例題 — 証明 (1)

例題 1

関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = 2x^2$$

と定義する．このとき，任意の正の整数 n に対して

$$f^n(x) = 2^{2^n-1}x^{2^n}$$

が成り立つことを証明せよ

<u>証明 (基底段階)</u>：まず，$n = 1$ のときに正しいことを証明する．

- 左辺 $= f^1(x) = f(x) = 2x^2$
- 右辺 $= 2^{2^1-1}x^{2^1} = 2x^2$
- したがって，$n = 1$ のとき，$f^n(x) = 2^{2^n-1}x^{2^n}$ は正しい．

関数の冪乗：例題 — 証明 (2)

例題 1

関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = 2x^2$$

と定義する．このとき，任意の正の整数 n に対して

$$f^n(x) = 2^{2^n-1}x^{2^n}$$

が成り立つことを証明せよ

証明 (帰納段階)：次に，任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える．

- $f^k(x) = 2^{2^k-1}x^{2^k}$ が正しいと仮定する．
- 証明すべきことは，$f^{k+1}(x) = 2^{2^{k+1}-1}x^{2^{k+1}}$ である．

関数の冪乗：例題 — 証明 (3)

$f^{k+1}(x)$

関数の冪乗：例題 — 証明 (3)

$$
\begin{aligned}
&f^{k+1}(x) \\
&= (f \circ f^k)(x) && \text{(関数の冪乗の定義)}
\end{aligned}
$$

関数の冪乗：例題 — 証明 (3)

$$
\begin{aligned}
& f^{k+1}(x) \\
&= (f \circ f^k)(x) && \text{(関数の冪乗の定義)} \\
&= f(f^k(x)) && \text{(関数の合成の定義)}
\end{aligned}
$$

関数の冪乗：例題 — 証明 (3)

$$
\begin{aligned}
f^{k+1}(x) & \\
&= (f \circ f^k)(x) && \text{(関数の冪乗の定義)} \\
&= f(f^k(x)) && \text{(関数の合成の定義)} \\
&= f(2^{2^k-1}x^{2^k}) && \text{(帰納法の仮定)}
\end{aligned}
$$

関数の冪乗：例題 — 証明 (3)

$$
\begin{aligned}
& f^{k+1}(x) \\
&\quad = (f \circ f^k)(x) && \text{(関数の冪乗の定義)} \\
&\quad = f(f^k(x)) && \text{(関数の合成の定義)} \\
&\quad = f(2^{2^k-1}x^{2^k}) && \text{(帰納法の仮定)} \\
&\quad = 2(2^{2^k-1}x^{2^k})^2 && \text{(f の定義)}
\end{aligned}
$$

関数の冪乗：例題 — 証明 (3)

$$
\begin{aligned}
f^{k+1}(x) \\
&= (f \circ f^k)(x) && \text{(関数の冪乗の定義)} \\
&= f(f^k(x)) && \text{(関数の合成の定義)} \\
&= f(2^{2^k-1}x^{2^k}) && \text{(帰納法の仮定)} \\
&= 2(2^{2^k-1}x^{2^k})^2 && \text{(f の定義)} \\
&= 2^{1+2(2^k-1)}x^{2\cdot 2^k} && \text{(計算して整理)}
\end{aligned}
$$

関数の冪乗：例題 — 証明 (3)

$$
\begin{aligned}
& f^{k+1}(x) \\
&= (f \circ f^k)(x) && \text{(関数の冪乗の定義)} \\
&= f(f^k(x)) && \text{(関数の合成の定義)} \\
&= f(2^{2^k-1}x^{2^k}) && \text{(帰納法の仮定)} \\
&= 2(2^{2^k-1}x^{2^k})^2 && \text{(}f\text{ の定義)} \\
&= 2^{1+2(2^k-1)}x^{2\cdot 2^k} && \text{(計算して整理)} \\
&= 2^{2^{k+1}-1}x^{2^{k+1}} && \text{(更に整理)}
\end{aligned}
$$

関数の冪乗：例題 — 証明 (3)

$$
\begin{aligned}
&f^{k+1}(x) \\
&= (f \circ f^k)(x) && \text{(関数の冪乗の定義)} \\
&= f(f^k(x)) && \text{(関数の合成の定義)} \\
&= f(2^{2^k-1}x^{2^k}) && \text{(帰納法の仮定)} \\
&= 2(2^{2^k-1}x^{2^k})^2 && \text{(f の定義)} \\
&= 2^{1+2(2^k-1)}x^{2\cdot 2^k} && \text{(計算して整理)} \\
&= 2^{2^{k+1}-1}x^{2^{k+1}} && \text{(更に整理)}
\end{aligned}
$$

したがって，$f^{k+1}(x) = 2^{2^{k+1}-1}x^{2^{k+1}}$ は正しい． □

目次

「辞書」をどのように定義するか？

「辞書」をどのように定義するか？

- 辞書は単語を集めたもの $\rightsquigarrow$ $\therefore$ 辞書は単語の集合

「辞書」をどのように定義するか？

「辞書」をどのように定義するか？

- 辞書は単語を集めたもの $\rightsquigarrow$ $\therefore$ 辞書は単語の集合

「単語」をどのように定義するか？

- 単語は文字を並べたもの $\rightsquigarrow$ $\therefore$ 単語は文字の列

「辞書」をどのように定義するか？

「辞書」をどのように定義するか？

- 辞書は単語を集めたもの $\rightsquigarrow$ $\therefore$ 辞書は単語の集合

「単語」をどのように定義するか？

- 単語は文字を並べたもの $\rightsquigarrow$ $\therefore$ 単語は文字の列

「文字」をどのように定義するか？

- 文字は集合

英語ならば，{a, b, c, d, ..., x, y, z}

「辞書」をどのように定義するか？

「辞書」をどのように定義するか？

- 辞書は単語を集めたもの $\rightsquigarrow$ $\therefore$ 辞書は単語の集合

「単語」をどのように定義するか？

- 単語は文字を並べたもの $\rightsquigarrow$ $\therefore$ 単語は文字の列

「文字」をどのように定義するか？

- 文字は集合

英語ならば，$\{$a, b, c, d, ..., x, y, z$\}$

「列」をどのように定義するか？

これがここからの話

- 再帰的に定義する

文字列の定義

文字の集合 Σ (アルファベットと呼ぶことが多い)

文字列とは？

Σ 上の文字列とは，次を満たすもののこと

1. ϵ は Σ 上の文字列である (${\epsilon}$ は空列を表す)
2. s が Σ 上の文字列であり，$x \in \Sigma$ ならば，xs も Σ 上の文字列である
3. このようにして生成されるものだけが Σ 上の文字列である

Σ 上の文字列をすべて集めた集合を Σ^* で表す

例：$\Sigma = \{a, b\}$ のとき

$$\begin{aligned}\Sigma^* &= \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa,\\ &\quad baa, aab, bab, aba, bba, abb, bbb, \ldots\}\end{aligned}$$

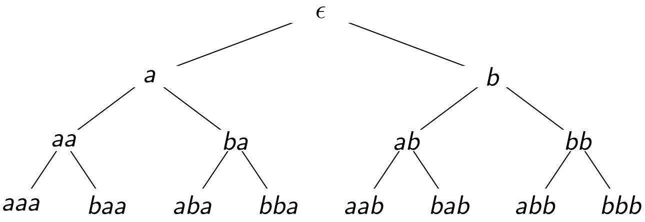
再帰的定義を理解する (1)：生成する

文字列とは？

Σ 上の文字列とは，次を満たすもののこと

1. ϵ は Σ 上の文字列である　　(ε は空列を表す)
2. s が Σ 上の文字列であり，$x \in \Sigma$ ならば，xs も Σ 上の文字列である
3. このようにして生成されるものだけが Σ 上の文字列である

Σ 上の文字列をすべて集めた集合を Σ^* で表す



再帰的定義を理解する (2)：認識する

文字列とは？

Σ 上の**文字列**とは，次を満たすもののこと

1. ϵ は Σ 上の文字列である　　(ϵ は空列を表す)
2. s が Σ 上の文字列であり，$x \in \Sigma$ ならば，xs も Σ 上の文字列である
3. このようにして生成されるものだけが Σ 上の文字列である

Σ 上の文字列をすべて集めた集合を Σ^* で表す

$$\begin{array}{c} bab \\ | \\ ab \\ | \\ b \\ | \\ \epsilon \end{array}$$

再帰的定義を理解する (2)：認識する

文字列とは？

Σ 上の文字列とは，次を満たすもののこと

1. ϵ は Σ 上の文字列である　　(ϵ は空列を表す)
2. s が Σ 上の文字列であり，$x \in \Sigma$ ならば，xs も Σ 上の文字列である
3. このようにして生成されるものだけが Σ 上の文字列である

Σ 上の文字列をすべて集めた集合を Σ^* で表す

bca

ca　$\times$

bca は $\{a, b\}$ 上の文字列ではない

格言

「生成」と「認識」は集合の再帰的定義の 2 つの側面

文字列の長さ

文字列の長さ (直感に基づく定義)

文字列 $s \in \Sigma^*$ の長さは，s に含まれる Σ の要素の数

文字列	長さ
ϵ	0
a	1
b	1
aa	2
abb	3
$baabaabb$	8

ちゃんと定義するには？

文字列の再帰的定義に沿って，その長さも再帰的に定義する

文字列の長さ：再帰的定義

文字列の長さ：再帰的定義

文字列 $s \in \Sigma^*$ の長さ $\ell(s)$ を次のように定義する

1. $\ell(\epsilon) = 0$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$\ell(xs) = 1 + \ell(s)$

$$\ell(babb)$$

注意

より正確には，$\ell \colon \Sigma^* \to \mathbb{R}$ という関数を再帰的に定義している

文字列の長さ：再帰的定義

文字列の長さ：再帰的定義

文字列 $s \in \Sigma^*$ の長さ $\ell(s)$ を次のように定義する

1. $\ell(\epsilon) = 0$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$\ell(xs) = 1 + \ell(s)$

$$\ell(babb) = 1 + \ell(abb)$$

注意

より正確には，$\ell \colon \Sigma^* \to \mathbb{R}$ という関数を再帰的に定義している

文字列の長さ：再帰的定義

文字列の長さ：再帰的定義

文字列 $s \in \Sigma^*$ の長さ $\ell(s)$ を次のように定義する

1. $\ell(\epsilon) = 0$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$\ell(xs) = 1 + \ell(s)$

$$
\begin{aligned}
\ell(babb) &= 1 + \ell(abb) \\
&= 1 + (1 + \ell(bb))
\end{aligned}
$$

注意

より正確には，$\ell \colon \Sigma^* \to \mathbb{R}$ という関数を再帰的に定義している

文字列の長さ：再帰的定義

文字列の長さ：再帰的定義

文字列 $s \in \Sigma^*$ の長さ $\ell(s)$ を次のように定義する

1. $\ell(\epsilon) = 0$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$\ell(xs) = 1 + \ell(s)$

$$
\begin{aligned}
\ell(babb) &= 1 + \ell(abb) \\
&= 1 + (1 + \ell(bb)) \\
&= 1 + (1 + (1 + \ell(b)))
\end{aligned}
$$

注意

より正確には，$\ell \colon \Sigma^* \to \mathbb{R}$ という関数を再帰的に定義している

文字列の長さ：再帰的定義

文字列の長さ：再帰的定義

文字列 $s \in \Sigma^*$ の長さ $\ell(s)$ を次のように定義する

1. $\ell(\epsilon) = 0$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$\ell(xs) = 1 + \ell(s)$

$$
\begin{aligned}
\ell(babb) &= 1 + \ell(abb) \\
&= 1 + (1 + \ell(bb)) \\
&= 1 + (1 + (1 + \ell(b))) \\
&= 1 + (1 + (1 + (1 + \ell(\epsilon))))
\end{aligned}
$$

注意

より正確には，$\ell \colon \Sigma^* \to \mathbb{R}$ という関数を再帰的に定義している

文字列の長さ：再帰的定義

文字列の長さ：再帰的定義

文字列 $s \in \Sigma^*$ の長さ $\ell(s)$ を次のように定義する

1. $\ell(\epsilon) = 0$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$\ell(xs) = 1 + \ell(s)$

$$
\begin{aligned}
\ell(babb) &= 1 + \ell(abb) \\
&= 1 + (1 + \ell(bb)) \\
&= 1 + (1 + (1 + \ell(b))) \\
&= 1 + (1 + (1 + (1 + \ell(\epsilon)))) \\
&= 1 + (1 + (1 + (1 + 0)))
\end{aligned}
$$

注意

より正確には，$\ell \colon \Sigma^* \to \mathbb{R}$ という関数を再帰的に定義している

文字列の長さ：再帰的定義

文字列の長さ：再帰的定義

文字列 $s \in \Sigma^*$ の長さ $\ell(s)$ を次のように定義する

1. $\ell(\epsilon) = 0$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$\ell(xs) = 1 + \ell(s)$

$$
\begin{aligned}
\ell(babb) &= 1 + \ell(abb) \\
&= 1 + (1 + \ell(bb)) \\
&= 1 + (1 + (1 + \ell(b))) \\
&= 1 + (1 + (1 + (1 + \ell(\epsilon)))) \\
&= 1 + (1 + (1 + (1 + 0))) \\
&= 4
\end{aligned}
$$

注意

より正確には，$\ell \colon \Sigma^* \to \mathbb{R}$ という関数を再帰的に定義している

文字列の性質

文字の集合 Σ

例題

Σ 上の任意の文字列 $s \in \Sigma^*$ と任意の文字 $x \in \Sigma$ に対して

$$sx \in \Sigma^*$$

となることを証明せよ

証明の方針

s の長さに関する帰納法

(s の長さは 0 以上なので,「長さが 0」のときが基底段階)

文字列の性質：証明 (1)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- $sx = x$

文字列の性質：証明 (1)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- $sx = x$
- $\epsilon \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ なので，文字列の定義より $x \in \Sigma^*$

文字列の性質：証明 (1)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- $sx = x$
- $\epsilon \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ なので，文字列の定義より $x \in \Sigma^*$
- したがって，$sx \in \Sigma^*$

文字列の性質：証明 (2)

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$

文字列の性質：証明 (2)

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法 (第 2 回講義より)

1. 「任意の〜を考える」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

文字列の性質：証明 (3)

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ を考える

- $sx \in \Sigma^*$ $\square$

文字列の性質：証明 (3)

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ を考える
- $\ell(s) = k + 1 \geq 1$ なので，文字列の定義より，ある $t \in \Sigma^*$ とある $y \in \Sigma$ が存在して $s = yt$
- $sx \in \Sigma^*$ □

文字列の性質：証明 (3)

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k+1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k+1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ を考える
- $\ell(s) = k+1 \geq 1$ なので，文字列の定義より，ある $t \in \Sigma^*$ とある $y \in \Sigma$ が存在して $s = yt$
- このとき，$k+1 = \ell(s) = \ell(yt) = 1 + \ell(t)$ なので，$\ell(t) = k$
- $sx \in \Sigma^*$ □

文字列の性質：証明 (3)

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ を考える
- $\ell(s) = k + 1 \geq 1$ なので，文字列の定義より，ある $t \in \Sigma^*$ とある $y \in \Sigma$ が存在して $s = yt$
- このとき，$k + 1 = \ell(s) = \ell(yt) = 1 + \ell(t)$ なので，$\ell(t) = k$
- 帰納法の仮定より，$tx \in \Sigma^*$
- $sx \in \Sigma^*$ □

文字列の性質：証明 (3)

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ を考える
- $\ell(s) = k + 1 \geq 1$ なので，文字列の定義より，ある $t \in \Sigma^*$ とある $y \in \Sigma$ が存在して $s = yt$
- このとき，$k + 1 = \ell(s) = \ell(yt) = 1 + \ell(t)$ なので，$\ell(t) = k$
- 帰納法の仮定より，$tx \in \Sigma^*$
- 文字列の定義より，$ytx \in \Sigma^*$
- $sx \in \Sigma^*$ □

文字列の性質：証明 (3)

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ に対して，$sx \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ と任意の $x \in \Sigma$ を考える
- $\ell(s) = k + 1 \geq 1$ なので，文字列の定義より，ある $t \in \Sigma^*$ とある $y \in \Sigma$ が存在して $s = yt$
- このとき，$k + 1 = \ell(s) = \ell(yt) = 1 + \ell(t)$ なので，$\ell(t) = k$
- 帰納法の仮定より，$tx \in \Sigma^*$
- 文字列の定義より，$ytx \in \Sigma^*$
- $yt = s$ なので，$sx \in \Sigma^*$ □

「回文」を定義する

回文 (かいぶん) (デジタル大辞泉)

1. 複数の人に順に回して知らせるようにした手紙や通知。回状。まわしぶみ。かいもん。
2. 和歌・俳諧などで、上から読んでも下から逆に読んでも同じ音になるように作ってある文句。「たけやぶやけた」の類。かいもん。

2 の意味での回文の例 (http://kaibunfan.com/より)

- できたら、しらたきで。
- ごつい、ドイツ語。
- 静岡を図示。
- 寒い！タンメンタイムさ。
- 良い知らせらしいよ。
- 風邪、なぜか、なかなか長いが、なかなかな風邪。なぜか。

回文を再帰的に定義する

文字の集合 Σ

回文とは？

Σ 上の回文とは，Σ 上の文字列で次を満たすもののこと

1. ϵ は Σ 上の回文である
2. 任意の $x \in \Sigma$ に対して x は Σ 上の回文である
3. s が Σ 上の回文であり，$x \in \Sigma$ ならば，xsx も Σ 上の回文である
4. このようにして生成されるものだけが Σ 上の回文である

例：$\Sigma = \{a, b\}$ のとき

$$\epsilon, a, b, aa, bb, aaa, bab, aba, bbb, \ldots$$

例題：次の関数はどんな操作を行う関数だろうか？

次の関数 $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ を考える

1. $f(\epsilon) = \epsilon$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$f(xs) = xx\,f(s)$

考えたいこと

- この関数 f が行う操作は何なのか？
- この関数 f がうまく定義されているか？ ($f(s) \in \Sigma^*$ なのか？)

例題：例を見てみる

次の関数 $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ を考える

1. $f(\epsilon) = \epsilon$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$f(xs) = xx\,f(s)$

$$f(abbaa)$$

例題：例を見てみる

次の関数 $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ を考える

1. $f(\epsilon) = \epsilon$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$f(xs) = xx\,f(s)$

$$f(abbaa) \quad = \quad aa\,f(bbaa)$$

例題：例を見てみる

次の関数 $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ を考える

1. $f(\epsilon) = \epsilon$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$f(xs) = xx\,f(s)$

$$\begin{aligned} f(abbaa) &= aa\,f(bbaa) \\ &= aabb\,f(baa) \end{aligned}$$

例題：例を見てみる

次の関数 $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ を考える

1. $f(\epsilon) = \epsilon$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$f(xs) = xx\,f(s)$

$$\begin{aligned} f(abbaa) &= aa\,f(bbaa) \\ &= aabb\,f(baa) \\ &= aabbbb\,f(aa) \end{aligned}$$

例題：例を見てみる

次の関数 $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ を考える

1. $f(\epsilon) = \epsilon$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$f(xs) = xx\, f(s)$

$$\begin{aligned} f(abbaa) &= aa\, f(bbaa) \\ &= aabb\, f(baa) \\ &= aabbbb\, f(aa) \\ &= aabbbbaa\, f(a) \end{aligned}$$

例題：例を見てみる

次の関数 $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ を考える

1. $f(\epsilon) = \epsilon$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$f(xs) = xx\,f(s)$

$$
\begin{aligned}
f(abbaa) &= aa\,f(bbaa) \\
&= aabb\,f(baa) \\
&= aabbbb\,f(aa) \\
&= aabbbbaa\,f(a) \\
&= aabbbbaaaa\,f(\epsilon)
\end{aligned}
$$

例題：例を見てみる

次の関数 $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ を考える

1. $f(\epsilon) = \epsilon$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$f(xs) = xx\,f(s)$

$$
\begin{aligned}
f(abbaa) &= aa\,f(bbaa)\\
&= aabb\,f(baa)\\
&= aabbbb\,f(aa)\\
&= aabbbbaa\,f(a)\\
&= aabbbbaaaa\,f(\epsilon)\\
&= aabbbbaaaa
\end{aligned}
$$

例題：うまく定義されていること

次の関数 $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ を考える

1. $f(\epsilon) = \epsilon$
2. $s \in \Sigma^*$ かつ $x \in \Sigma$ ならば，$f(xs) = xx\,f(s)$

証明すること

任意の $s \in \Sigma^*$ に対して $f(s) \in \Sigma^*$ であること

s の長さに関する帰納法で証明する

例題：うまく定義されていること (証明)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

例題：うまく定義されていること (証明)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- f の定義より $f(\epsilon) = \epsilon$ なので，文字列の定義より $f(\epsilon) = \epsilon \in \Sigma^*$

例題：うまく定義されていること (証明)

<u>証明 (基底段階)：</u>$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- f の定義より $f(\epsilon) = \epsilon$ なので，文字列の定義より $f(\epsilon) = \epsilon \in \Sigma^*$

<u>証明 (帰納段階)：</u>

例題：うまく定義されていること (証明)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- f の定義より $f(\epsilon) = \epsilon$ なので，文字列の定義より $f(\epsilon) = \epsilon \in \Sigma^*$

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$

例題：うまく定義されていること (証明)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- f の定義より $f(\epsilon) = \epsilon$ なので，文字列の定義より $f(\epsilon) = \epsilon \in \Sigma^*$

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ を考える

例題：うまく定義されていること (証明)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- f の定義より $f(\epsilon) = \epsilon$ なので，文字列の定義より $f(\epsilon) = \epsilon \in \Sigma^*$

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ を考える
- $\ell(s) = k + 1 \geq 1$ なので，文字列の定義より，ある $t \in \Sigma^*$ とある $y \in \Sigma$ が存在して $s = yt$

例題：うまく定義されていること (証明)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- f の定義より $f(\epsilon) = \epsilon$ なので，文字列の定義より $f(\epsilon) = \epsilon \in \Sigma^*$

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ を考える
- $\ell(s) = k + 1 \geq 1$ なので，文字列の定義より，ある $t \in \Sigma^*$ とある $y \in \Sigma$ が存在して $s = yt$
- このとき，$k + 1 = \ell(s) = \ell(yt) = 1 + \ell(t)$ なので，$\ell(t) = k$

例題：うまく定義されていること (証明)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき

- f の定義より $f(\epsilon) = \epsilon$ なので，文字列の定義より $f(\epsilon) = \epsilon \in \Sigma^*$

証明 (帰納段階)：

- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ を考える
- $\ell(s) = k + 1 \geq 1$ なので，文字列の定義より，ある $t \in \Sigma^*$ とある $y \in \Sigma$ が存在して $s = yt$
- このとき，$k + 1 = \ell(s) = \ell(yt) = 1 + \ell(t)$ なので，$\ell(t) = k$
- 帰納法の仮定より，$f(t) \in \Sigma^*$

例題：うまく定義されていること (証明)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき
- f の定義より $f(\epsilon) = \epsilon$ なので，文字列の定義より $f(\epsilon) = \epsilon \in \Sigma^*$

証明 (帰納段階)：
- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ を考える
- $\ell(s) = k + 1 \geq 1$ なので，文字列の定義より，ある $t \in \Sigma^*$ とある $y \in \Sigma$ が存在して $s = yt$
- このとき，$k + 1 = \ell(s) = \ell(yt) = 1 + \ell(t)$ なので，$\ell(t) = k$
- 帰納法の仮定より，$f(t) \in \Sigma^*$
- 文字列の定義より，$y\,f(t) \in \Sigma^*$ となり，さらに $yy\,f(t) \in \Sigma^*$

例題：うまく定義されていること (証明)

証明 (基底段階)：$\ell(s) = 0$ のとき，すなわち，$s = \epsilon$ のとき
- f の定義より $f(\epsilon) = \epsilon$ なので，文字列の定義より $f(\epsilon) = \epsilon \in \Sigma^*$

証明 (帰納段階)：
- $\ell(s) = k \geq 0$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$ であると仮定する

証明すべきこと

$\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ に対して，$f(s) \in \Sigma^*$

- $\ell(s) = k + 1$ である任意の $s \in \Sigma^*$ を考える
- $\ell(s) = k + 1 \geq 1$ なので，文字列の定義より，ある $t \in \Sigma^*$ とある $y \in \Sigma$ が存在して $s = yt$
- このとき，$k + 1 = \ell(s) = \ell(yt) = 1 + \ell(t)$ なので，$\ell(t) = k$
- 帰納法の仮定より，$f(t) \in \Sigma^*$
- 文字列の定義より，$y\,f(t) \in \Sigma^*$ となり，さらに $yy\,f(t) \in \Sigma^*$
- f の定義より，$f(s) = f(yt) = yy\,f(t)$ なので，$f(s) = y\,f(t) \in \Sigma^*$

□

目次

今日のまとめ

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 再帰的定義を通して，関数の冪乗を理解する
- 集合を再帰的に定義する方法を理解する

概要

主題

- 理工学のあらゆる分野に現れる数学の言葉と論理を徹底的に身につける
- これによって，論理的な思考を行う基礎能力を体得し，将来的に，専門書を読み解き，自分で学術的な文書を書くことができるようにする
- キャッチフレーズは「語学としての数学」

達成目標

以下の 2 項目をすべて達成することを目標とする．

1. 数学における基本的な用語 (集合，論理，関数，関係) を正しく使うことができる
2. 数学における基本的な証明を正しく行うことができる

目次

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次

1. 関数の冪乗
2. 集合の再帰的定義
3. 今日のまとめ と 講義全体のまとめ