

離散数学 第 12 回  
証明法 (5) : 数学的帰納法

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 7 月 29 日

最終更新 : 2014 年 7 月 28 日 11:38

## スケジュール 前半

- |   |  |         |
|---|--|---------|
| 1 | 証明法 (1) : 「 $\sim$ が存在する」ことの証明               | (4月8日)  |
| 2 | 証明法 (2) : 「任意の $\sim$ に対して $\dots$ である」ことの証明 | (4月15日) |
| 3 | 証明法 (3) : 「 $\sim$ ならば $\dots$ である」ことの証明     | (4月22日) |
| * | 休み (祝日)                                      | (4月29日) |
| * | 休み (振替休日)                                    | (5月6日)  |
| 4 | 集合の記法 (1) : 外延的記法と内包的記法                      | (5月13日) |
| 5 | 集合の記法 (2) : 直積と冪集合                           | (5月20日) |
| 6 | 証明法 (4) : 集合に関する証明                           | (5月27日) |
| 7 | 関数 (1) : 像と逆像                                | (6月3日)  |
| ● | 中間試験   | (6月10日) |

- |    |                      |         |
|----|----------------------|---------|
| 8  | 関数 (2) : 全射と単射       | (6月17日) |
| ★  | 休講 (海外出張)            | (6月24日) |
| ★  | 休講 (海外出張)            | (7月1日)  |
| 9  | 関係 (1) : 関係          | (7月8日)  |
| 10 | 関係 (2) : 同値関係        | (7月15日) |
| 11 | 関係 (3) : 順序関係        | (7月22日) |
| 12 | 証明法 (5) : 数学的帰納法     | (7月29日) |
| 13 | 集合の記法 (3) : 集合の再帰的定義 | (8月5日)  |
| ●  | 期末試験                 | (8月12日) |

### この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

### 今日の目標

- ▶ 数学的帰納法で証明ができるようになる
- ▶ 再帰的定義によって無限を扱う方法を理解する

# 目次

① 数学的帰納法

② 再帰的定義

③ 今日のまとめ

## 例題 1

## 例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

## 確認

- ▶  $n = 1$  のとき :  $8^n - 3^n = 8 - 3 = 5$
- ▶  $n = 2$  のとき :  $8^n - 3^n = 64 - 9 = 55 = 5 \times 11$
- ▶  $n = 3$  のとき :  $8^n - 3^n = 512 - 27 = 485 = 5 \times 97$
- ▶ ...

注 : これはただの確認であり, 証明ではない

## 例題 1 : 数学的帰納法による証明

## 例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

数学的帰納法による証明 : 方針

- 1  $n = 1$  のときに正しいことを証明する
- 2 任意の正の整数  $k \geq 1$  に対して,  
 $n = k$  のときに正しいならば,  $n = k + 1$  のときに正しいことを証明する

## 例題 1 : 数学的帰納法による証明 (1)

## 例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

証明 : まず  $n = 1$  のときに正しいことを証明する.

- ▶  $n = 1$  のとき,  $8^n - 3^n = 8 - 3 = 5$ .
- ▶ 5 は 5 で割り切れるので, このとき正しい.



## 例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

## 例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

証明 (続) : 次に, 任意の正の整数  $k \geq 1$  を考える.

- ▶  $8^k - 3^k$  が 5 で割り切れると仮定する.

(注: 帰納法の仮定と呼ばれる)

- ▶ 証明すべきことは,  $8^{k+1} - 3^{k+1}$  が 5 で割り切れることである.

## 例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

## 例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

証明 (続) : 次に, 任意の正の整数  $k \geq 1$  を考える.

- ▶  $8^k - 3^k$  が 5 で割り切れると仮定する.

(注 : 帰納法の仮定と呼ばれる)

- ▶ 証明すべきことは,  $8^{k+1} - 3^{k+1}$  が 5 で割り切れることである.
- ▶ 帰納法の仮定より, ある正の整数  $m$  が存在して,  $8^k - 3^k = 5m$  となる.

## 例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

## 例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

証明 (続) : 次に, 任意の正の整数  $k \geq 1$  を考える.

- ▶  $8^k - 3^k$  が 5 で割り切れると仮定する.

(注 : 帰納法の仮定と呼ばれる)

- ▶ 証明すべきことは,  $8^{k+1} - 3^{k+1}$  が 5 で割り切れることである.
- ▶ 帰納法の仮定より, ある正の整数  $m$  が存在して,  $8^k - 3^k = 5m$  となる.
- ▶  $8^{k+1} - 3^{k+1}$

## 例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

## 例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

証明 (続) : 次に, 任意の正の整数  $k \geq 1$  を考える.

- ▶  $8^k - 3^k$  が 5 で割り切れると仮定する.

(注 : 帰納法の仮定と呼ばれる)

- ▶ 証明すべきことは,  $8^{k+1} - 3^{k+1}$  が 5 で割り切れることである.
- ▶ 帰納法の仮定より, ある正の整数  $m$  が存在して,  $8^k - 3^k = 5m$  となる.
- ▶  $8^{k+1} - 3^{k+1} = (5 + 3) \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k$

## 例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

## 例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

証明 (続) : 次に, 任意の正の整数  $k \geq 1$  を考える.

- ▶  $8^k - 3^k$  が 5 で割り切れると仮定する.

(注 : 帰納法の仮定と呼ばれる)

- ▶ 証明すべきことは,  $8^{k+1} - 3^{k+1}$  が 5 で割り切れることである.
- ▶ 帰納法の仮定より, ある正の整数  $m$  が存在して,  $8^k - 3^k = 5m$  となる.
- ▶  $8^{k+1} - 3^{k+1} = (5 + 3) \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k = 5 \cdot 8^k + 3 \cdot (8^k - 3^k)$

## 例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

## 例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

証明 (続) : 次に, 任意の正の整数  $k \geq 1$  を考える.

- ▶  $8^k - 3^k$  が 5 で割り切れると仮定する.

(注 : 帰納法の仮定と呼ばれる)

- ▶ 証明すべきことは,  $8^{k+1} - 3^{k+1}$  が 5 で割り切れることである.
- ▶ 帰納法の仮定より, ある正の整数  $m$  が存在して,  $8^k - 3^k = 5m$  となる.
- ▶  $8^{k+1} - 3^{k+1} = (5 + 3) \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k = 5 \cdot 8^k + 3 \cdot (8^k - 3^k)$
- ▶ したがって,  $8^{k+1} - 3^{k+1} = 5 \cdot 8^k + 3 \cdot 5m$

## 例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

## 例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

証明 (続) : 次に, 任意の正の整数  $k \geq 1$  を考える.

- ▶  $8^k - 3^k$  が 5 で割り切れると仮定する.

(注 : 帰納法の仮定と呼ばれる)

- ▶ 証明すべきことは,  $8^{k+1} - 3^{k+1}$  が 5 で割り切れることである.
- ▶ 帰納法の仮定より, ある正の整数  $m$  が存在して,  $8^k - 3^k = 5m$  となる.
- ▶  $8^{k+1} - 3^{k+1} = (5 + 3) \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k = 5 \cdot 8^k + 3 \cdot (8^k - 3^k)$
- ▶ したがって,  $8^{k+1} - 3^{k+1} = 5 \cdot 8^k + 3 \cdot 5m = 5 \cdot (8^k + 3m)$ .

## 例題 1 : 数学的帰納法による証明 (2)

## 例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

証明 (続) : 次に, 任意の正の整数  $k \geq 1$  を考える.

- ▶  $8^k - 3^k$  が 5 で割り切れると仮定する.

(注 : 帰納法の仮定と呼ばれる)

- ▶ 証明すべきことは,  $8^{k+1} - 3^{k+1}$  が 5 で割り切れることである.
- ▶ 帰納法の仮定より, ある正の整数  $m$  が存在して,  $8^k - 3^k = 5m$  となる.
- ▶  $8^{k+1} - 3^{k+1} = (5 + 3) \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k = 5 \cdot 8^k + 3 \cdot (8^k - 3^k)$
- ▶ したがって,  $8^{k+1} - 3^{k+1} = 5 \cdot 8^k + 3 \cdot 5m = 5 \cdot (8^k + 3m)$ .
- ▶  $8^k + 3m$  は正の整数なので,  $8^{k+1} - 3^{k+1}$  は 5 で割り切れる. □



## 数学的帰納法とは？

## 数学的帰納法による証明法

「任意の正の整数  $n$  に対して、 $P(n)$ 」という形の命題の証明

- 1  $P(1)$  を証明 (基底段階)
- 2 「任意の正の整数  $k$  に対して『 $P(k)$  ならば  $P(k+1)$ 』」を証明 (帰納段階)

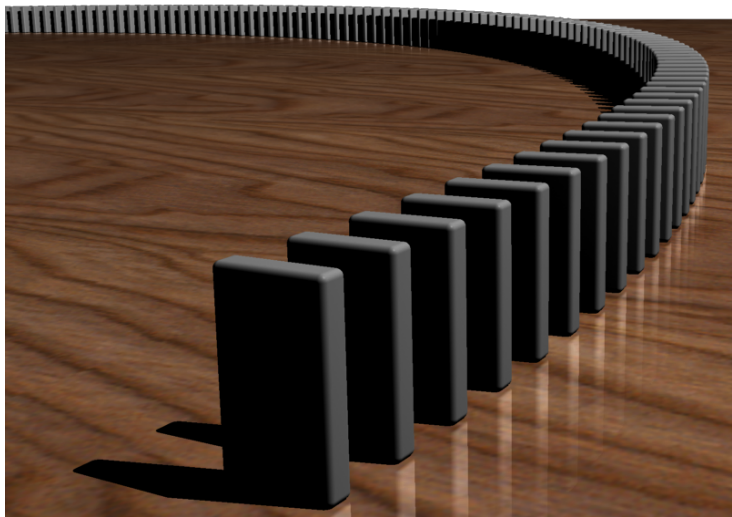
## 帰納段階での証明の書き方

- 1 「任意の正の整数  $k$  を考える」と書く
- 2 「 $P(k)$  であると仮定する」と書く
- 3  $P(k)$  を用いて、 $P(k+1)$  が正しいことを導く (証明する)

例題 1 では、

$$P(n) = 8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

## 数学的帰納法のイメージ



<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Dominoeffect.png>

## 例題 2

## 例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

## 確認

- ▶  $n = 1$  のとき :  $2n = 2 \leq 2 = 2^n$
- ▶  $n = 2$  のとき :  $2n = 4 \leq 4 = 2^n$
- ▶  $n = 3$  のとき :  $2n = 6 \leq 8 = 2^n$
- ▶  $n = 4$  のとき :  $2n = 8 \leq 16 = 2^n$
- ▶ ...

注 : これはただの確認であり, 証明ではない

## 例題 2 : 数学的帰納法 (基底段階)

## 例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

証明 (基底段階) : まず,  $n = 1$  のときに正しいことを証明する.

## 例題 2 : 数学的帰納法 (基底段階)

## 例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

証明 (基底段階) : まず,  $n = 1$  のときに正しいことを証明する.▶ 左辺 =  $2n = 2$ .

## 例題 2 : 数学的帰納法 (基底段階)

## 例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

証明 (基底段階) : まず,  $n = 1$  のときに正しいことを証明する.

- ▶ 左辺 =  $2n = 2$ .
- ▶ 右辺 =  $2^n = 2$ .

## 例題 2 : 数学的帰納法 (基底段階)

## 例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

証明 (基底段階) : まず,  $n = 1$  のときに正しいことを証明する.

- ▶ 左辺 =  $2n = 2$ .
- ▶ 右辺 =  $2^n = 2$ .
- ▶ したがって,  $2n \leq 2^n$  であり, 正しい.

## 例題 2 : 数学的帰納法 (帰納段階)

## 例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 任意の正の整数  $k \geq 1$  を考える.

- ▶  $2k \leq 2^k$  であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは,  $2(k+1) \leq 2^{k+1}$  である.  
(コツ : ↑これをしっかりと書くとよい)



## 例題 2 : 数学的帰納法 (帰納段階)

## 例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 任意の正の整数  $k \geq 1$  を考える.

- ▶  $2k \leq 2^k$  であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは,  $2(k+1) \leq 2^{k+1}$  である.  
(コツ : ↑これをしっかりと書くとよい)
- ▶  $2(k+1) = 2k + 2.$

## 例題 2 : 数学的帰納法 (帰納段階)

## 例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 任意の正の整数  $k \geq 1$  を考える.

- ▶  $2k \leq 2^k$  であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは,  $2(k+1) \leq 2^{k+1}$  である.  
(コツ : ↑これをしっかりと書くとよい)
- ▶  $2(k+1) = 2k + 2$ .
- ▶ 帰納法の仮定より,  $2k + 2 \leq 2^k + 2$ .

## 例題 2 : 数学的帰納法 (帰納段階)

## 例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 任意の正の整数  $k \geq 1$  を考える.

- ▶  $2k \leq 2^k$  であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは,  $2(k+1) \leq 2^{k+1}$  である.  
(コツ : ↑これをしっかりと書くとよい)
- ▶  $2(k+1) = 2k + 2$ .
- ▶ 帰納法の仮定より,  $2k + 2 \leq 2^k + 2$ .
- ▶ したがって,  $2(k+1) \leq 2^k + 2 \leq 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ .

## 例題 2 : 数学的帰納法 (帰納段階)

## 例題 2 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 任意の正の整数  $k \geq 1$  を考える.

- ▶  $2k \leq 2^k$  であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは,  $2(k+1) \leq 2^{k+1}$  である.  
(コツ : ↑これをしっかりと書くとよい)
- ▶  $2(k+1) = 2k + 2$ .
- ▶ 帰納法の仮定より,  $2k + 2 \leq 2^k + 2$ .
- ▶ したがって,  $2(k+1) \leq 2^k + 2 \leq 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ .
- ▶ したがって,  $2(k+1) \leq 2^{k+1}$  となる. □

## 例題 3 : 数学的帰納法の変種

## 例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数  $n$  に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

## 確認

- ▶  $n = 3$  のとき :  $6n = 18 < 27 = 3^n$
- ▶  $n = 4$  のとき :  $6n = 24 < 81 = 3^n$
- ▶  $n = 5$  のとき :  $6n = 30 < 243 = 3^n$
- ▶ ...

## 例題 3 : 数学的帰納法の変種

## 例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数  $n$  に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

## 確認

- ▶  $n = 3$  のとき :  $6n = 18 < 27 = 3^n$
- ▶  $n = 4$  のとき :  $6n = 24 < 81 = 3^n$
- ▶  $n = 5$  のとき :  $6n = 30 < 243 = 3^n$
- ▶ ...

## 注意 : 証明の方法

数学的帰納法を  $n = 1$  から始めず,  $n = 3$  から始める

## 例題 3 : 数学的帰納法の変種 (基底段階)

## 例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数  $n$  に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

証明 (基底段階) : まず,  $n = 3$  のときに正しいことを証明する.

## 例題 3 : 数学的帰納法の変種 (基底段階)

## 例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数  $n$  に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

証明 (基底段階) : まず,  $n = 3$  のときに正しいことを証明する.

▶ 左辺 =  $6n = 18$ .



## 例題 3 : 数学的帰納法の変種 (基底段階)

## 例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数  $n$  に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

証明 (基底段階) : まず,  $n = 3$  のときに正しいことを証明する.

- ▶ 左辺 =  $6n = 18$ .
- ▶ 右辺 =  $3^n = 27$ .

## 例題 3 : 数学的帰納法の変種 (基底段階)

## 例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数  $n$  に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

証明 (基底段階) : まず,  $n = 3$  のときに正しいことを証明する.

- ▶ 左辺 =  $6n = 18$ .
- ▶ 右辺 =  $3^n = 27$ .
- ▶ したがって,  $n = 3$  のとき  $6n < 3^n$  となり, 正しい.

## 例題 3 : 数学的帰納法の変種 (帰納段階)

## 例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数  $n$  に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 3 以上の任意の正整数  $k$  を考える.

- ▶  $6k < 3^k$  であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは,  $6(k+1) < 3^{k+1}$  である.

## 例題 3 : 数学的帰納法の変種 (帰納段階)

## 例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数  $n$  に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 3 以上の任意の正整数  $k$  を考える.

- ▶  $6k < 3^k$  であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは,  $6(k+1) < 3^{k+1}$  である.
- ▶  $6(k+1) = 6k + 6$

## 例題 3 : 数学的帰納法の変種 (帰納段階)

## 例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数  $n$  に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 3 以上の任意の正整数  $k$  を考える.

- ▶  $6k < 3^k$  であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは,  $6(k+1) < 3^{k+1}$  である.
- ▶  $6(k+1) = 6k + 6 < 3^k + 6$

## 例題 3 : 数学的帰納法の変種 (帰納段階)

## 例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数  $n$  に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 3 以上の任意の正整数  $k$  を考える.

- ▶  $6k < 3^k$  であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは,  $6(k+1) < 3^{k+1}$  である.
- ▶  $6(k+1) = 6k + 6 < 3^k + 6 < 3^k + 2 \cdot 3^k$

## 例題 3 : 数学的帰納法の変種 (帰納段階)

## 例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数  $n$  に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 3 以上の任意の正整数  $k$  を考える.

- ▶  $6k < 3^k$  であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは,  $6(k+1) < 3^{k+1}$  である.
- ▶  $6(k+1) = 6k + 6 < 3^k + 6 < 3^k + 2 \cdot 3^k = 3^{k+1}$ .

## 例題 3 : 数学的帰納法の変種 (帰納段階)

## 例題 3 : 証明したいこと

3 以上の任意の正の整数  $n$  に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ.

証明 (帰納段階) : 次に, 3 以上の任意の正整数  $k$  を考える.

- ▶  $6k < 3^k$  であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは,  $6(k+1) < 3^{k+1}$  である.
- ▶  $6(k+1) = 6k + 6 < 3^k + 6 < 3^k + 2 \cdot 3^k = 3^{k+1}$ .
- ▶ したがって,  $6(k+1) < 3^{k+1}$  となり, 正しい. □



# 目次

① 数学的帰納法

② 再帰的定義

③ 今日のまとめ

## クイズ

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21,

## クイズ

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 31

$$n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

## クイズ

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 31

$$n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21,

## クイズ

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 31

$$n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 151

$$n^5 - 10n^4 + 35n^3 - 49n^2 + 25n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

## クイズ

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 31

$$n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 151

$$n^5 - 10n^4 + 35n^3 - 49n^2 + 25n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

- ▶ 「...」 はあいまい

## クイズ

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 31

$$n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 151

$$n^5 - 10n^4 + 35n^3 - 49n^2 + 25n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

- ▶ 「…」はあいまい

## 格言

情報科学の本質の1つは「『無意識』を意識すること」

## 階乗

## 階乗とは？ (常識に基づく定義)

正の整数  $n$  に対して、 $n$  の階乗とは

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

のこと

この定義の問題点

- ▶ 「…」はあいまい

あいまいさのないように定義するには？



## 階乗：再帰的定義

## 階乗とは？ (再帰的定義)

正の整数  $n$  に対して、 $n$  の階乗とは

$$n! = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ n \cdot (n - 1)! & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

のこと

実際の計算

- ▶  $n = 1$  のとき :  $1! = 1$
- ▶  $n = 2$  のとき :  $2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$
- ▶  $n = 3$  のとき :  $3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6$
- ▶  $n = 4$  のとき :  $4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$
- ▶ ...

## 例題 4 : 再帰的定義

## 例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して,  $a_n$  を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 任意の正の整数  $n$  に対して,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

## 確認

- ▶  $n = 1$  のとき :  $a_1 = 1$
- ▶  $n = 2$  のとき :  $a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3 = 2 \cdot 2 - 1$
- ▶  $n = 3$  のとき :  $a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5 = 2 \cdot 3 - 1$
- ▶ ...

## 例題 4 : 数学的帰納法による証明 (基底段階)

## 例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して,  $a_n$  を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 任意の正の整数  $n$  に対して,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (基底段階) : まず,  $n = 1$  のときを証明する.

- ▶ 左辺 =  $a_1 = 1$ .
- ▶ 右辺 =  $2 \cdot 1 - 1 = 1$ .
- ▶ したがって,  $n = 1$  のとき  $a_n = 2n - 1$  となる.

## 例題 4 : 数学的帰納法による証明 (帰納段階)

## 例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して,  $a_n$  を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 任意の正の整数  $n$  に対して,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階) : 次に任意の正の整数  $k$  を考える.

- ▶  $a_k = 2k - 1$  であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは,  $a_{k+1} = 2(k + 1) - 1$ .

## 例題 4 : 数学的帰納法による証明 (帰納段階)

## 例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して,  $a_n$  を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 任意の正の整数  $n$  に対して,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階) : 次に任意の正の整数  $k$  を考える.

- ▶  $a_k = 2k - 1$  であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは,  $a_{k+1} = 2(k + 1) - 1$ .
- ▶  $a_{k+1} = a_k + 2$

## 例題 4 : 数学的帰納法による証明 (帰納段階)

## 例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して,  $a_n$  を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 任意の正の整数  $n$  に対して,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階) : 次に任意の正の整数  $k$  を考える.

- ▶  $a_k = 2k - 1$  であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは,  $a_{k+1} = 2(k+1) - 1$ .
- ▶  $a_{k+1} = a_k + 2 = (2k - 1) + 2$

## 例題 4 : 数学的帰納法による証明 (帰納段階)

## 例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して,  $a_n$  を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 任意の正の整数  $n$  に対して,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階) : 次に任意の正の整数  $k$  を考える.

- ▶  $a_k = 2k - 1$  であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは,  $a_{k+1} = 2(k+1) - 1$ .
- ▶  $a_{k+1} = a_k + 2 = (2k - 1) + 2 = 2(k+1) - 1$ .

## 例題 4 : 数学的帰納法による証明 (帰納段階)

## 例題 4 : 証明したいこと

任意の正の整数  $n$  に対して,  $a_n$  を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 任意の正の整数  $n$  に対して,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階) : 次に任意の正の整数  $k$  を考える.

- ▶  $a_k = 2k - 1$  であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは,  $a_{k+1} = 2(k+1) - 1$ .
- ▶  $a_{k+1} = a_k + 2 = (2k - 1) + 2 = 2(k+1) - 1$ .
- ▶ したがって,  $a_{k+1} = 2(k+1) - 1$  となる.





## 再帰的定義の例：フィボナッチ数

## フィボナッチ数とは？

任意の正の整数  $n$  に対して、第  $n$  番フィボナッチ数  $F_n$  を

$$F_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ F_{n-1} + F_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する

## 確認

- ▶  $n = 1$  のとき :  $F_1 = 1$
- ▶  $n = 2$  のとき :  $F_2 = 1$
- ▶  $n = 3$  のとき :  $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$
- ▶  $n = 4$  のとき :  $F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$
- ▶  $n = 5$  のとき :  $F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$
- ▶ ...

## フィボナッチ数の性質

## 例題 5 (カッシーニの恒等式)

第  $n$  番フィボナッチ数を  $F_n$  とするとき, 任意の正整数  $n$  に対して

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

## フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明 (基底段階)

## 例題 5 (カッシーニの恒等式)

第  $n$  番フィボナッチ数を  $F_n$  とするとき、任意の正整数  $n$  に対して

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(基底段階)  $n = 1$  の場合を証明する.

- ▶ 左辺 =  $F_2^2 - F_3F_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$ .
- ▶ 右辺 =  $(-1)^1 = -1$ .
- ▶ したがって、 $n = 1$  のとき  $F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$  は成り立つ

## フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明 (帰納段階)

## 例題 5 (カッシーニの恒等式)

任意の正整数  $n$  に対して第  $n$  番フィボナッチ数を  $F_n$  とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(帰納段階) 次に、1 以上の任意の正の整数  $k$  を考える。

- ▶  $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$  であると仮定する。
- ▶ 証明すべきことは、 $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$  である。

## フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明 (帰納段階)

## 例題 5 (カッシーニの恒等式)

任意の正整数  $n$  に対して第  $n$  番フィボナッチ数を  $F_n$  とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(帰納段階) 次に、1 以上の任意の正の整数  $k$  を考える。

- ▶  $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$  であると仮定する。
- ▶ 証明すべきことは、 $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$  である。
- ▶  $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$

## フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明（帰納段階）

## 例題 5（カッシーニの恒等式）

任意の正整数  $n$  に対して第  $n$  番フィボナッチ数を  $F_n$  とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：（帰納段階）次に、1 以上の任意の正の整数  $k$  を考える。

- ▶  $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$  であると仮定する。
- ▶ 証明すべきことは、 $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$  である。
- ▶  $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$   
 $= F_{k+2}^2 - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+1}$ （フィボナッチ数の定義と  $k+3 > 2$  から）

## フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明（帰納段階）

## 例題 5（カッシーニの恒等式）

任意の正整数  $n$  に対して第  $n$  番フィボナッチ数を  $F_n$  とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：（帰納段階）次に、1 以上の任意の正の整数  $k$  を考える。

- ▶  $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$  であると仮定する。
- ▶ 証明すべきことは、 $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$  である。
- ▶  $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$ 

$$= F_{k+2}^2 - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+1} \quad (\text{フィボナッチ数の定義と } k+3 > 2 \text{ から})$$

$$= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2 \quad (\text{展開して整理})$$

## フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明（帰納段階）

## 例題 5（カッシーニの恒等式）

任意の正整数  $n$  に対して第  $n$  番フィボナッチ数を  $F_n$  とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：（帰納段階）次に、1 以上の任意の正の整数  $k$  を考える。

- ▶  $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$  であると仮定する。
- ▶ 証明すべきことは、 $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$  である。
- ▶  $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$ 
  - $= F_{k+2}^2 - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+1}$ （フィボナッチ数の定義と  $k+3 > 2$  から）
  - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2$ （展開して整理）
  - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+2}F_k - (-1)^k$ （帰納法の仮定から）



## フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明（帰納段階）

## 例題 5 (カッシーニの恒等式)

任意の正整数  $n$  に対して第  $n$  番フィボナッチ数を  $F_n$  とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(帰納段階) 次に，1 以上の任意の正の整数  $k$  を考える。

- ▶  $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$  であると仮定する。
- ▶ 証明すべきことは， $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$  である。
- ▶  $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$ 
  - $= F_{k+2}^2 - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+1}$  (フィボナッチ数の定義と  $k+3 > 2$  から)
  - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2$  (展開して整理)
  - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+2}F_k - (-1)^k$  (帰納法の仮定から)
  - $= F_{k+2}(F_{k+2} - F_{k+1} - F_k) + (-1)^{k+1}$  (因数分解して整理)

## フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明（帰納段階）

## 例題 5 (カッシーニの恒等式)

任意の正整数  $n$  に対して第  $n$  番フィボナッチ数を  $F_n$  とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(帰納段階) 次に、1 以上の任意の正の整数  $k$  を考える。

- ▶  $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$  であると仮定する。
- ▶ 証明すべきことは、 $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$  である。
- ▶  $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$ 
  - $= F_{k+2}^2 - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+1}$  (フィボナッチ数の定義と  $k+3 > 2$  から)
  - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2$  (展開して整理)
  - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+2}F_k - (-1)^k$  (帰納法の仮定から)
  - $= F_{k+2}(F_{k+2} - F_{k+1} - F_k) + (-1)^{k+1}$  (因数分解して整理)
  - $= (-1)^{k+1}$ . (フィボナッチ数の定義と  $k+2 > 2$  から)

## フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明（帰納段階）

## 例題 5 (カッシーニの恒等式)

任意の正整数  $n$  に対して第  $n$  番フィボナッチ数を  $F_n$  とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(帰納段階) 次に、1 以上の任意の正の整数  $k$  を考える。

- ▶  $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$  であると仮定する。
- ▶ 証明すべきことは、 $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$  である。
- ▶  $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$ 
  - $= F_{k+2}^2 - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+1}$  (フィボナッチ数の定義と  $k+3 > 2$  から)
  - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2$  (展開して整理)
  - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+2}F_k - (-1)^k$  (帰納法の仮定から)
  - $= F_{k+2}(F_{k+2} - F_{k+1} - F_k) + (-1)^{k+1}$  (因数分解して整理)
  - $= (-1)^{k+1}$ . (フィボナッチ数の定義と  $k+2 > 2$  から)
- ▶ したがって、 $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$  となる。 □

## フィボナッチ数の公式

## 例題 6：フィボナッチ数の公式

任意の正整数  $n$  に対して第  $n$  番フィボナッチ数を  $F_n$  とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ

## 証明の注意点

- ▶  $F_n$  は  $F_{n-1}, F_{n-2}$  を使って定義される
- ▶ よって、(1つ前だけ仮定する) 普通の帰納法では証明できない
- ▶ よって、もっと強い証明の仕方が必要となる
- ▶ 基底段階も  $n = 1$  のときと  $n = 2$  のときの2つが必要となる

## 数学的帰納法の強いバージョン

## 数学的帰納法の強いバージョン (累積帰納法とも呼ばれる)

[基底段階]

- ▶  $P(1)$  を証明する

[帰納段階] 任意の正の整数  $k$  を考える

- ▶ 1 以上  $k$  以下の任意の正の整数  $k'$  に対して  $P(k')$  を仮定する
  - ▶  $P(k+1)$  を証明する
- 
- ▶ 前のバージョンでは帰納段階で「 $P(k)$ 」のみを仮定した
  - ▶ フィボナッチ数に関する証明では基底段階が  $P(1)$  と  $P(2)$  になる

## フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（基底段階 1）

## 例題 6：フィボナッチ数の公式

任意の正整数  $n$  に対して第  $n$  番フィボナッチ数を  $F_n$  とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明：まず、 $n = 1$  のときを証明する。

- ▶ 左辺 =  $F_1 = 1$ .
- ▶ 右辺 =  $\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1$ .
- ▶ したがって、 $n = 1$  のときは正しい。

## フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（基底段階 2）

## 例題 6：フィボナッチ数の公式

任意の正整数  $n$  に対して第  $n$  番フィボナッチ数を  $F_n$  とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明：次に、 $n = 2$  のときを証明する。

- ▶ 左辺 =  $F_2 = 1$ .
- ▶ 右辺 =  $\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{6-2\sqrt{5}}{4} \right)$   
 $= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1$ .
- ▶ したがって、 $n = 2$  のときは正しい。

## フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（帰納段階 1）

## 例題 6：フィボナッチ数の公式

任意の正整数  $n$  に対して第  $n$  番フィボナッチ数を  $F_n$  とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明：  $k$  を 2 以上の任意の整数とする。

- ▶ 1 以上  $k$  以下の任意の整数  $k'$  に対して、

$$F_{k'} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k'} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k'} \right) \text{ と仮定する。}$$

- ▶ 証明すべきことは、 $F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right)$  である。



## フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（帰納段階 2）

$$F_{k+1}$$

## フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（帰納段階 2）

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \quad (\text{フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2)$$

## フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (帰納段階 2)

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) \\ &&& \text{(帰納法の仮定)} \end{aligned}$$

## フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（帰納段階 2）

$$\begin{aligned}
 F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) \\
 &&& \text{(帰納法の仮定)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right) \\
 &&& \text{(式の整理)}
 \end{aligned}$$

## フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（帰納段階 2）

$$\begin{aligned}
 F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) && \text{(帰納法の仮定)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right) && \text{(式の整理)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) && \text{(式の整理)}
 \end{aligned}$$

## フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（帰納段階 2）

$$\begin{aligned}
F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) && \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right) && \text{(式の整理)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) && \text{(式の整理)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right) && \text{(式の整理)}
\end{aligned}$$

## フィボナッチ数の公式：数学的帰納法（帰納段階 2）

$$\begin{aligned}
 F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2 \text{)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) && \text{(帰納法の仮定)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right) && \text{(式の整理)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) && \text{(式の整理)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right) && \text{(式の整理)}
 \end{aligned}$$

したがって、 $F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right)$  となる。  $\square$

# 目次

① 数学的帰納法

② 再帰的定義

③ 今日のまとめ



## 今日のまとめ

## この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

## 今日の目標

- ▶ 数学的帰納法で証明ができるようになる
- ▶ 再帰的定義によって無限を扱う方法を理解する

# 目次

① 数学的帰納法

② 再帰的定義

③ 今日のまとめ

## 残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
  - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
  - ▶ 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する
  - ▶ 内容は何でも OK
  - ▶ 匿名で OK
- ▶ 「学生による授業評価」マークシート
  - ▶ 科目番号 : 1511, 科目名 : 離散数学, 教員名 : 岡本 吉央

# 目次

① 数学的帰納法

② 再帰的定義

③ 今日のまとめ