

離散数学 第 11 回  
関係 (3) : 順序関係

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 7 月 22 日

最終更新 : 2014 年 7 月 23 日 10:54

## スケジュール 前半

- |   |  |         |
|---|--|---------|
| 1 | 証明法 (1) : 「 $\sim$ が存在する」ことの証明               | (4月8日)  |
| 2 | 証明法 (2) : 「任意の $\sim$ に対して $\dots$ である」ことの証明 | (4月15日) |
| 3 | 証明法 (3) : 「 $\sim$ ならば $\dots$ である」ことの証明     | (4月22日) |
| * | 休み (祝日)                                      | (4月29日) |
| * | 休み (振替休日)                                    | (5月6日)  |
| 4 | 集合の記法 (1) : 外延的記法と内包的記法                      | (5月13日) |
| 5 | 集合の記法 (2) : 直積と冪集合                           | (5月20日) |
| 6 | 証明法 (4) : 集合に関する証明                           | (5月27日) |
| 7 | 関数 (1) : 像と逆像                                | (6月3日)  |
| ● | 中間試験   | (6月10日) |

- |    |                      |         |
|----|----------------------|---------|
| 8  | 関数 (2) : 全射と単射       | (6月17日) |
| ★  | 休講 (海外出張)            | (6月24日) |
| ★  | 休講 (海外出張)            | (7月1日)  |
| 9  | 関係 (1) : 関係          | (7月8日)  |
| 10 | 関係 (2) : 同値関係        | (7月15日) |
| 11 | 関係 (3) : 順序関係        | (7月22日) |
| 12 | 証明法 (5) : 数学的帰納法     | (7月29日) |
| 13 | 集合の記法 (3) : 集合の再帰的定義 | (8月5日)  |
| ●  | 期末試験                 | (8月12日) |

- ▶ 日時, 場所
  - ▶ 8月12日(火) 第6限, 新C203教室  
(いつもの講義室ではないので注意)
- ▶ 出題範囲
  - ▶ 第7回(6月3日)の最初から第12回(7月29日)の最後までの内容  
(第13回の内容は期末試験に出題しない)
- ▶ 出題形式
  - ▶ 演習問題と同じ形式の問題を6題出題する
  - ▶ その中の3題は演習問題として提示されたものと同一である
    - ただし, 発展問題は出題しない
  - ▶ 全問に解答する
- ▶ 配点: 1題10点満点, 計60点満点
- ▶ 時間: 90分
- ▶ 持ち込み: A4用紙1枚分(裏表自筆書き込み)のみ可

この日, この時間の都合がどうしても悪い場合

- ▶ 7/29(火)の授業終了までに連絡

### この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

### 今日の目標

- ▶ 順序関係を図示する方法を理解する
  - ▶ ハッセ図
- ▶ 順序関係に関する概念を理解する
  - ▶ 上界, 極大元, 最大元, 上限 (最小上界)
  - ▶ 下界, 極小元, 最小元, 下限 (最大下界)

集合  $A$  と  $A$  上の関係  $R$

### 半順序関係とは？

$R$  が半順序関係であるとは、次を満たすこと

- ▶  $R$  は反射性を持つ
  - ▶  $R$  は反対称性を持つ
  - ▶  $R$  は推移性を持つ
- 
- ▶ 反射性 : 任意の  $x \in A$  に対して,  $x R x$
  - ▶ 反対称性 : 任意の  $x, y \in A$  に対して,  $x R y$  かつ  $y R x$  ならば  $x = y$
  - ▶ 推移性 : 任意の  $x, y, z \in A$  に対して,  $x R y$  かつ  $y R z$  ならば  $x R z$

集合  $A$  と  $A$  上の関係  $R$

### 全順序関係とは？

$R$  が全順序関係であるとは、次を満たすこと

- ▶  $R$  は反射性を持つ
  - ▶  $R$  は反対称性を持つ
  - ▶  $R$  は推移性を持つ
  - ▶  $R$  は完全性を持つ
- 
- ▶ 反射性：任意の  $x \in A$  に対して、 $x R x$
  - ▶ 反対称性：任意の  $x, y \in A$  に対して、 $x R y$  かつ  $y R x$  ならば  $x = y$
  - ▶ 推移性：任意の  $x, y, z \in A$  に対して、 $x R y$  かつ  $y R z$  ならば  $x R z$
  - ▶ 完全性：任意の  $x, y \in A$  に対して、 $x R y$  または  $y R x$

## 半順序関係を表す記号

半順序関係を表すために、 $\mathbb{R}$ ではなくて、特別な記号を使うことが多い

### 半順序関係を表す記号の例

- ▶  $\leq$
- ▶  $\preceq$
- ▶  $\preccurlyeq$
- ▶  $\succcurlyeq$
- ▶  $\sqsubset$
- ▶  $\dots$

### その否定を表す記号の例

- ▶  $\not\leq$
- ▶  $\not\preceq$
- ▶  $\not\preccurlyeq$
- ▶  $\not\succcurlyeq$
- ▶  $\not\sqsubset$
- ▶  $\dots$

状況に応じて、使い分けられたりする  
(この講義では専ら「 $\preceq$ 」を用いていく)



## 半順序集合と全順序集合

### 半順序集合とは？

集合  $A$  と  $A$  上の半順序関係  $\preceq$  に対して  
順序対  $(A, \preceq)$  を半順序集合と呼ぶ

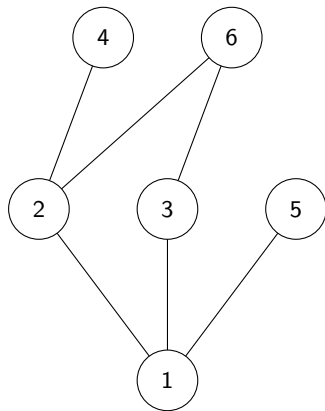
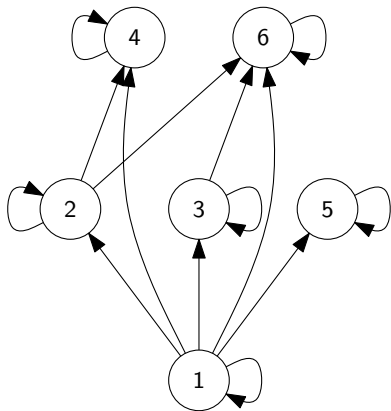
### 全順序集合とは？

集合  $A$  と  $A$  上の全順序関係  $\preceq$  に対して  
順序対  $(A, \preceq)$  を全順序集合と呼ぶ

# 目次

- ① ハッセ図
- ② 上界と下界
- ③ その他の用語  
極大元, 極小元  
最大元, 最小元  
上限 (最小上界), 下限 (最大下界)
- ④ 今日のまとめ

## ハッセ図：とりあえず例を見てみる

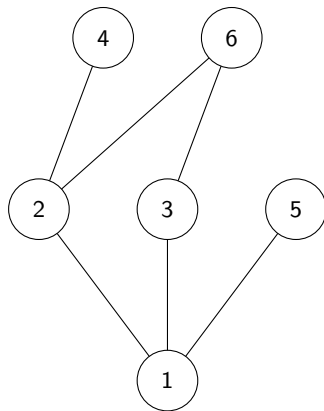
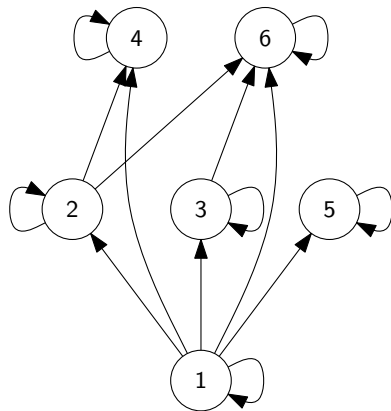


## ハッセ図

ハッセ図とは？ (常識に基づく定義)

半順序集合  $(A, \preceq)$  のハッセ図とは、次の規則に従って描いた図

(1)  $A$  の各要素を点として描く

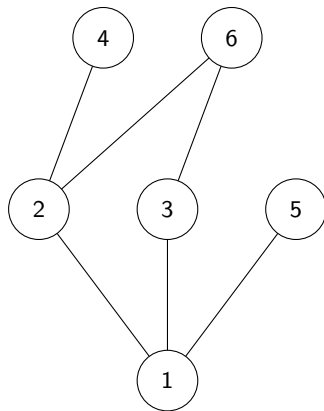
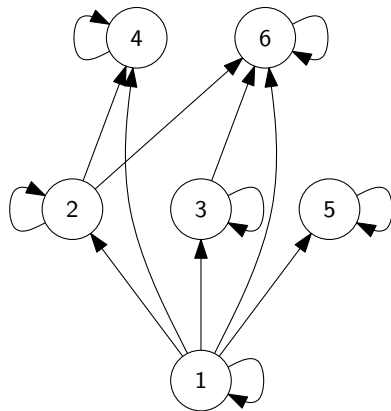


## ハッセ図

ハッセ図とは？ (常識に基づく定義)

半順序集合  $(A, \preceq)$  のハッセ図とは、次の規則に従って描いた図

(2)  $\preceq$  において大きい要素ほど上に描く

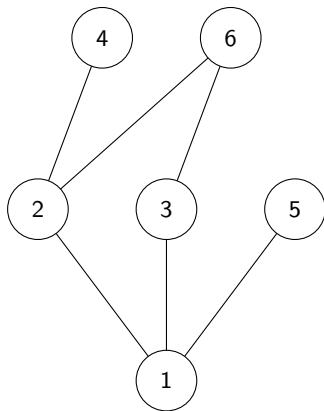
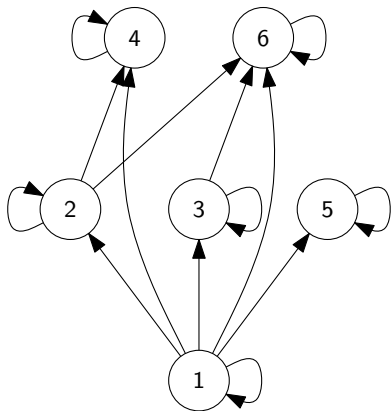


## ハッセ図

ハッセ図とは？ (常識に基づく定義)

半順序集合  $(A, \preceq)$  のハッセ図とは、次の規則に従って描いた図

(3)  $x \preceq y$  で、 $x$  から  $y$  へ「遠回り」がないとき、 $x$  と  $y$  を線で結ぶ

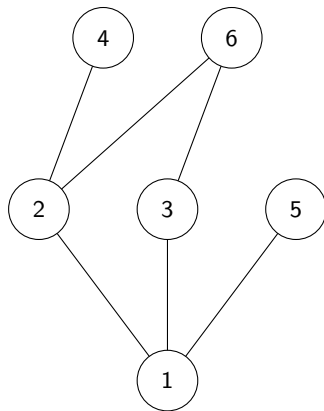
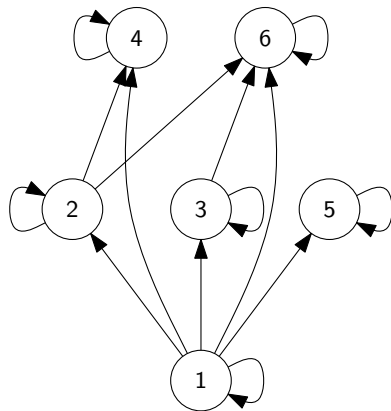


## ハッセ図

ハッセ図とは？ (常識に基づく定義)

半順序集合  $(A, \preceq)$  のハッセ図とは、次の規則に従って描いた図

(4) どの線も下から上へ単調に描かれる



## 比較可能性と比較不能性

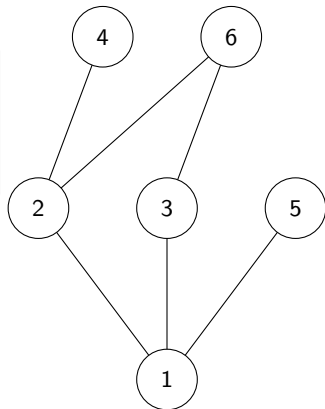
半順序集合  $(A, \preceq)$ 

比較可能とは？

- ▶  $x, y \in A$  が比較可能であるとは  $x \preceq y$  または  $y \preceq x$  であること
- ▶ そうでないとき,  $x, y$  は比較不能

例：

- ▶ 2 と 6 は比較可能
- ▶ 1 と 4 は比較可能
- ▶ 2 と 3 は比較不能
- ▶ 4 と 6 は比較不能



格言

比較不能なものを扱える半順序思考



## 比較可能性と比較不能性：ハッセ図において

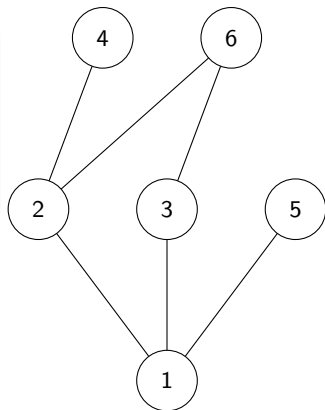
半順序集合  $(A, \preceq)$ 

ハッセ図で比較可能性を読み取る

- ▶  $x, y \in A$  が比較可能である  $\Leftrightarrow$   
 $x$  と  $y$  を結ぶ単調な「道」が存在する
- ▶  $x, y \in A$  が比較可能でない  $\Leftrightarrow$   
 $x$  と  $y$  を結ぶ単調な「道」が存在しない

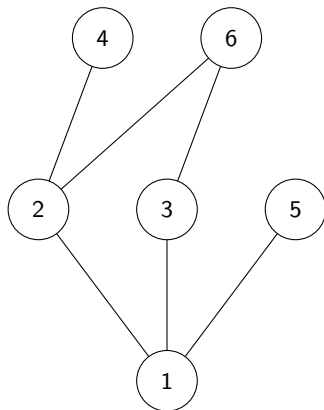
例：

- ▶ 2 と 6 は比較可能
- ▶ 1 と 4 は比較可能
- ▶ 2 と 3 は比較不能
- ▶ 4 と 6 は比較不能

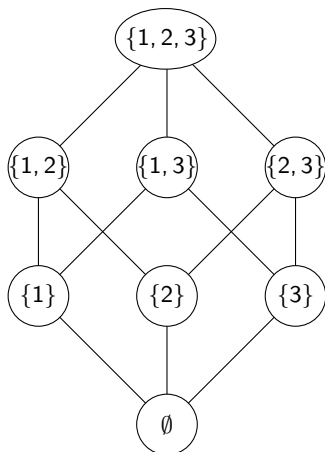


## いろいろな半順序集合 (1)

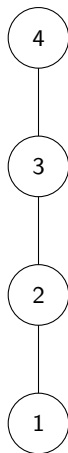
$(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |)$  (「 $a | b$ 」とは「 $a$ は $b$ の約数」の意味)



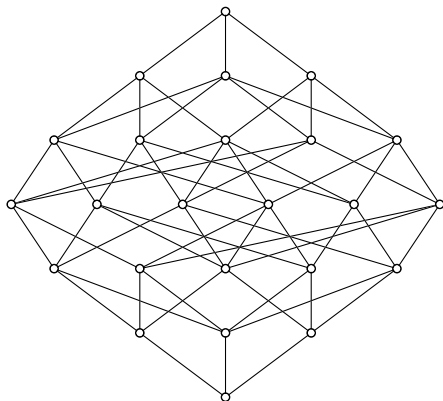
## いろいろな半順序集合 (2)

 $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ 

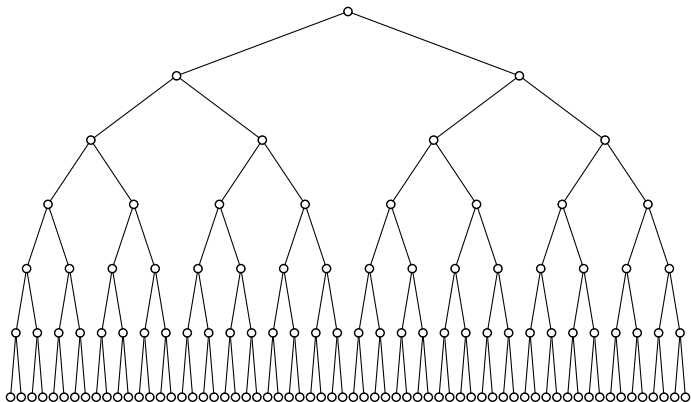
## いろいろな半順序集合 (3)

 $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$ 

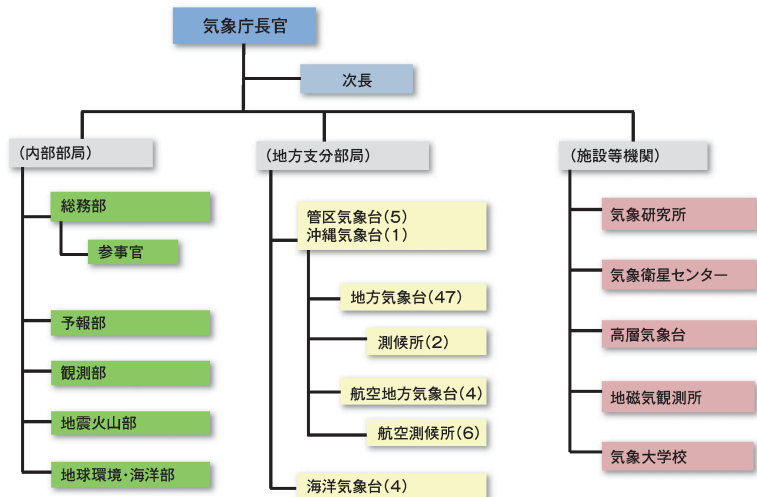
## いろいろな半順序集合 (4)



## いろいろな半順序集合 (5)

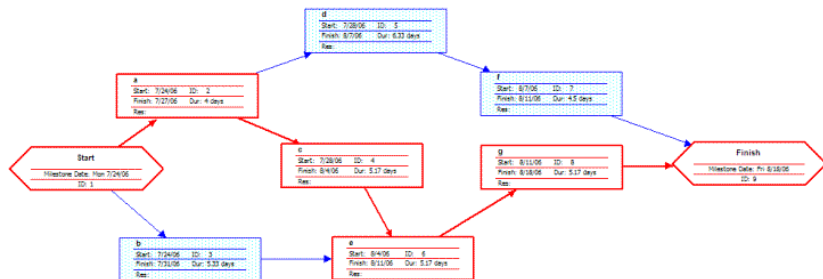


## 半順序集合の例 (1) : 階層的組織



<http://www.jma.go.jp/jma/kishou/intro/gyomu/index3.html>

## 半順序集合の例 (2) : 先行関係を持つジョブのスケジューリング



[http://en.wikipedia.org/wiki/File: PERT\\_example\\_network\\_diagram.gif](http://en.wikipedia.org/wiki/File: PERT_example_network_diagram.gif)



## その他の記法

半順序集合  $(A, \preceq)$  について

- ▶ 「 $a \preceq b$ 」であることを「 $b \succeq a$ 」とも書く
- ▶ 「 $a \preceq b$ かつ  $a \neq b$ 」であることを「 $a \prec b$ 」と書く
- ▶ 「 $a \prec b$ 」であることを「 $b \succ a$ 」とも書く

## 注意

- ▶ 「 $a \not\prec b$ 」と「 $a \succ b$ 」が同値であるとは限らない
- ▶ ただし、 $\preceq$ が全順序ならば、この2つは同値 (演習問題)

# 目次

## ① ハッセ図

## ② 上界と下界

## ③ その他の用語

極大元, 極小元

最大元, 最小元

上限 (最小上界), 下限 (最大下界)

## ④ 今日のまとめ

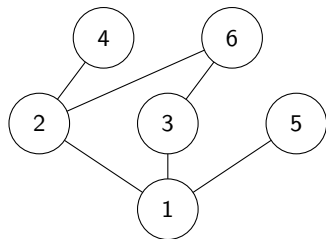
## 上界

半順序集合  $(A, \preceq)$  と  $A$  の部分集合  $B \subseteq A$

$B$  の上界とは？

集合  $B$  の上界とは、要素  $a \in A$  で、次を満たすもの

任意の  $b \in B$  に対して  $b \preceq a$



- ▶ 6 は  $\{2, 3\}$  の上界
  - ▶  $2 \preceq 6$  は成立,  $3 \preceq 6$  は成立

$B$  の上界とは?: 直感的な説明

$A$  の要素で、 $B$  のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

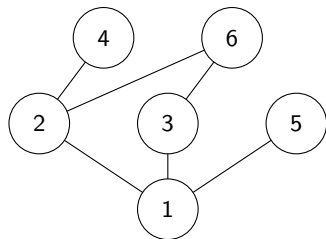
## 上界

半順序集合  $(A, \preceq)$  と  $A$  の部分集合  $B \subseteq A$

$B$  の上界とは？

集合  $B$  の上界とは、要素  $a \in A$  で、次を満たすもの

任意の  $b \in B$  に対して  $b \preceq a$



- ▶ 4 は  $\{2\}$  の上界
  - ▶  $2 \preceq 4$  は成立

$B$  の上界とは?: 直感的な説明

$A$  の要素で、 $B$  のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

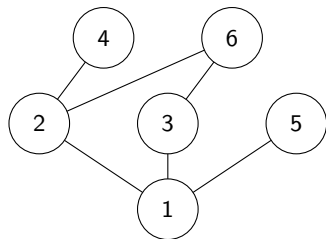
## 上界

半順序集合  $(A, \preceq)$  と  $A$  の部分集合  $B \subseteq A$

$B$  の上界とは？

集合  $B$  の上界とは、要素  $a \in A$  で、次を満たすもの

任意の  $b \in B$  に対して  $b \preceq a$



- ▶ 2 は  $\{2\}$  の上界
  - ▶  $2 \preceq 2$  は成立

$B$  の上界とは?: 直感的な説明

$A$  の要素で、 $B$  のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

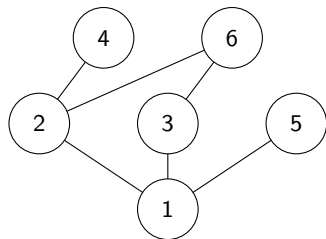
## 上界

半順序集合  $(A, \preceq)$  と  $A$  の部分集合  $B \subseteq A$

$B$  の上界とは？

集合  $B$  の上界とは、要素  $a \in A$  で、次を満たすもの

任意の  $b \in B$  に対して  $b \preceq a$



- ▶  $\{2, 5\}$  の上界は存在しない
  - ▶  $2 \preceq 1$  は不成立,  $5 \preceq 1$  は不成立

$B$  の上界とは?: 直感的な説明

$A$  の要素で、 $B$  のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

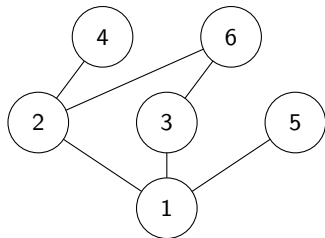
## 上界

半順序集合  $(A, \preceq)$  と  $A$  の部分集合  $B \subseteq A$

$B$  の上界とは？

集合  $B$  の上界とは、要素  $a \in A$  で、次を満たすもの

任意の  $b \in B$  に対して  $b \preceq a$



▶  $\{2, 5\}$  の上界は存在しない

- ▶  $2 \preceq 1$  は不成立,  $5 \preceq 1$  は不成立
- ▶  $2 \preceq 2$  は成立,  $5 \preceq 2$  は不成立
- ▶  $2 \preceq 3$  は不成立,  $5 \preceq 3$  は不成立
- ▶  $2 \preceq 4$  は成立,  $5 \preceq 4$  は不成立
- ▶  $2 \preceq 5$  は不成立,  $5 \preceq 5$  は成立
- ▶  $2 \preceq 6$  は成立,  $5 \preceq 6$  は不成立

$B$  の上界とは?: 直感的な説明

$A$  の要素で、 $B$  のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

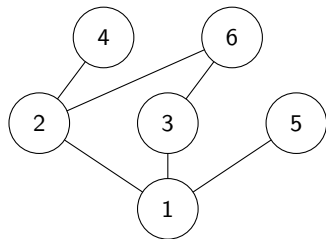
## 下界

半順序集合  $(A, \preceq)$  と  $A$  の部分集合  $B \subseteq A$

$B$  の下界 (かかい) とは？

集合  $B$  の下界とは、要素  $a \in A$  で、次を満たすもの

任意の  $b \in B$  に対して  $a \preceq b$



- ▶ 1 は  $\{2, 3\}$  の下界
- ▶ 1 は  $\{2\}$  の下界
- ▶ 2 は  $\{2\}$  の下界
- ▶ 2 は  $\{2, 6\}$  の下界
- ▶ 1 は  $\{2, 6\}$  の下界

$B$  の下界とは?: 直感的な説明

$A$  の要素で、 $B$  のどの要素よりも下にある (あるいは同じ) もの



# 目次

- ① ハッセ図
- ② 上界と下界
- ③ その他の用語
  - 極大元, 極小元
  - 最大元, 最小元
  - 上限 (最小上界), 下限 (最大下界)
- ④ 今日のまとめ

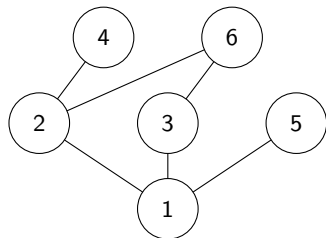
# 極大元

半順序集合  $(A, \preceq)$  と  $A$  の部分集合  $B \subseteq A$

$B$  の極大元とは？

集合  $B$  の極大元とは、要素  $b \in B$  で、次を満たすもの

任意の  $b' \in B$  に対して、 $b \preceq b'$  ならば  $b = b'$



- ▶ 2 は  $\{2, 3, 4\}$  の極大元ではない
- ▶ 3 は  $\{2, 3, 4\}$  の極大元
- ▶ 4 は  $\{2, 3, 4\}$  の極大元

$B$  の極大元とは?: 直感的な説明

$B$  の要素で、 $B$  の他の要素がそれより上にはないもの

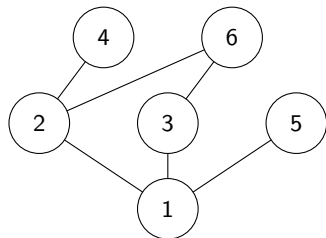
## 極小元

半順序集合  $(A, \preceq)$  と  $A$  の部分集合  $B \subseteq A$

$B$  の極小元とは？

集合  $B$  の極小元とは、要素  $b \in B$  で、次を満たすもの

任意の  $b' \in B$  に対して  $b' \preceq b$  ならば  $b = b'$



- ▶ 2 は  $\{2, 3, 4\}$  の極小元
- ▶ 3 は  $\{2, 3, 4\}$  の極小元
- ▶ 4 は  $\{2, 3, 4\}$  の極小元ではない

$B$  の極小元とは?: 直感的な説明

$B$  の要素で、 $B$  の他の要素がそれより下にならないもの

## 極大元が存在しない例

- ▶ 半順序集合  $(\mathbb{R}, \leq)$  (注: これは全順序集合でもある)
- ▶  $B = (0, 1) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ かつ } 0 < x < 1\}$
- ▶ このとき,  $B$  の極大元は存在しない

## 極大元が存在しない例

- ▶ 半順序集合  $(\mathbb{R}, \leq)$  (注: これは全順序集合でもある)
- ▶  $B = (0, 1) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ かつ } 0 < x < 1\}$
- ▶ このとき,  $B$  の極大元は存在しない

証明すべきこと (定義に立ち戻って書き直す)

任意の  $b \in B$  に対して,

「任意の  $b' \in B$  に対して,  $b \leq b'$  ならば  $b = b'$ 」ではない

## 極大元が存在しない例

- ▶ 半順序集合  $(\mathbb{R}, \leq)$  (注: これは全順序集合でもある)
- ▶  $B = (0, 1) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ かつ } 0 < x < 1\}$
- ▶ このとき,  $B$  の極大元は存在しない

証明すべきこと (定義に立ち戻って書き直す)

任意の  $b \in B$  に対して,  
「任意の  $b' \in B$  に対して,  $b \leq b'$  ならば  $b = b'$ 」ではない

証明すべきこと (書き換え)

任意の  $b \in B$  に対して,  
「ある  $b' \in B$  に対して, 『 $b \leq b'$  ならば  $b = b'$ 』ではない」

## 極大元が存在しない例

- ▶ 半順序集合  $(\mathbb{R}, \leq)$  (注: これは全順序集合でもある)
- ▶  $B = (0, 1) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ かつ } 0 < x < 1\}$
- ▶ このとき,  $B$  の極大元は存在しない

### 証明すべきこと (定義に立ち戻って書き直す)

任意の  $b \in B$  に対して,  
「任意の  $b' \in B$  に対して,  $b \leq b'$  ならば  $b = b'$ 」ではない

### 証明すべきこと (書き換え)

任意の  $b \in B$  に対して,  
「ある  $b' \in B$  に対して, 『 $b \leq b'$  ならば  $b = b'$ 』ではない」

### 証明のために行うこと

- ▶ 任意の  $b \in B$  を考える
- ▶  $b$  を使って,  $b \leq b'$  であるが,  $b = b'$  とならない  $b' \in B$  を見つける

## 極大元が存在しない例：証明

- ▶ 任意の  $b \in (0, 1)$  を考える.
- ▶  $\frac{b+1}{2}$  を考える
- ▶  $b > 0$  なので,  $\frac{b+1}{2} > \frac{0+1}{2} > 0$ .
- ▶ また,  $b < 1$  なので,  $\frac{b+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$ .
- ▶ したがって,  $\frac{b+1}{2} \in (0, 1)$ .
- ▶ そして,  $b \leq \frac{b+1}{2}$  かつ  $b \neq \frac{b+1}{2}$ .
- ▶ したがって, ある  $b' \in (0, 1)$  が存在して,  $b \leq b'$  かつ  $b \neq b'$  となる.
- ▶ したがって,  $(0, 1)$  の極大元は存在しない. □



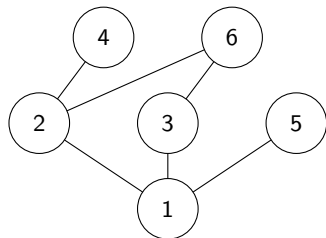
## 最大元

半順序集合  $(A, \preceq)$  と  $A$  の部分集合  $B \subseteq A$

$B$  の最大元とは？

集合  $B$  の**最大元**とは、要素  $b \in B$  で、次を満たすもの

任意の  $b' \in B$  に対して  $b' \preceq b$



- ▶ 2 は  $\{2, 3, 6\}$  の最大元ではない
- ▶ 6 は  $\{2, 3, 6\}$  の最大元
- ▶  $\{2, 3\}$  の最大元は存在しない

$B$  の最大元とは?: 直感的な説明

$B$  の要素で、 $B$  の他のどの要素よりも大きいもの

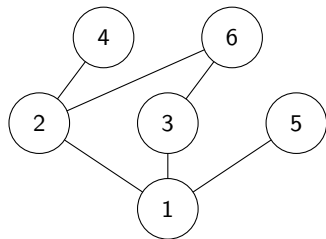
## 最小元

半順序集合  $(A, \preceq)$  と  $A$  の部分集合  $B \subseteq A$

$B$  の最小元とは？

集合  $B$  の**最小元**とは、要素  $b \in B$  で、次を満たすもの

任意の  $b' \in B$  に対して  $b \preceq b'$



- ▶ 2 は  $\{1, 2, 3\}$  の最小元ではない
- ▶ 1 は  $\{1, 2, 3\}$  の最小元
- ▶  $\{2, 3\}$  の最小元は存在しない

$B$  の最小元とは?: 直感的な説明

$B$  の要素で、 $B$  の他のどの要素よりも小さいもの

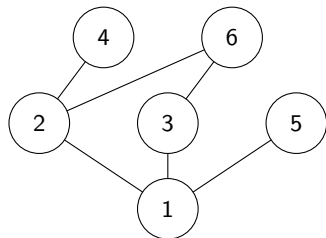
## 上限 (最小上界)

半順序集合  $(A, \preceq)$  と  $A$  の部分集合  $B \subseteq A$

$B$  の上限とは？

集合  $B$  の**上限**とは、 $B$  の上界  $a \in A$  で、次を満たすもの

$B$  の任意の上界  $a' \in A$  に対して  $a \preceq a'$



- ▶ 6 は  $\{2, 3\}$  の上限
- ▶ 2 は  $\{2\}$  の上限

$B$  の上限とは?: 直感的な説明

$B$  の上界で、 $B$  の他のどの上界よりも小さいもの

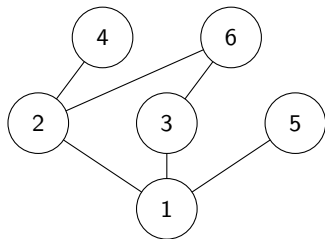
## 下限 (最大下界)

半順序集合  $(A, \preceq)$  と  $A$  の部分集合  $B \subseteq A$

$B$  の下限とは？

集合  $B$  の**下限**とは、 $B$  の下界  $a \in A$  で、次を満たすもの

$B$  の任意の下界  $a' \in A$  に対して  $a' \preceq a$



- ▶ 1 は  $\{2, 3\}$  の下限
- ▶ 2 は  $\{2\}$  の下限

$B$  の下限とは?: 直感的な説明

$B$  の下界で、 $B$  の他のどの下界よりも大きいもの

## 様々な性質

半順序集合  $(A, \preceq)$  と  $A$  の部分集合  $B \subseteq A$

- ▶  $B$  の最大元は, 存在するならば, ただ一つ.
- ▶  $B$  の最小元は, 存在するならば, ただ一つ.
- ▶  $B$  の上限は, 存在するならば, ただ一つ.
- ▶  $B$  の下限は, 存在するならば, ただ一つ.

証明は演習問題

# 目次

- ① ハッセ図
- ② 上界と下界
- ③ その他の用語  
極大元, 極小元  
最大元, 最小元  
上限 (最小上界), 下限 (最大下界)
- ④ 今日のまとめ

## 今日のまとめ

## この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

## 今日の目標

- ▶ 順序関係を図示する方法を理解する
  - ▶ ハッセ図
- ▶ 順序関係に関する概念を理解する
  - ▶ 上界, 極大元, 最大元, 上限 (最小上界)
  - ▶ 下界, 極小元, 最小元, 下限 (最大下界)

# 目次

- ① ハッセ図
- ② 上界と下界
- ③ その他の用語
  - 極大元, 極小元
  - 最大元, 最小元
  - 上限 (最小上界), 下限 (最大下界)
- ④ 今日のまとめ



## 残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
  - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
  - ▶ 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する
  - ▶ 内容は何でも OK
  - ▶ 匿名で OK

# 目次

- ① ハッセ図
- ② 上界と下界
- ③ その他の用語
  - 極大元, 極小元
  - 最大元, 最小元
  - 上限 (最小上界), 下限 (最大下界)
- ④ 今日のまとめ