離散数学 第 10 回
関係 (2)：同値関係

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 7 月 15 日

最終更新：2014 年 7 月 14 日　10:19

スケジュール 前半

1. 証明法 (1)：「～が存在する」ことの証明 (4 月 8 日)
2. 証明法 (2)：「任意の～に対して…である」ことの証明 (4 月 15 日)
3. 証明法 (3)：「～ならば…である」ことの証明 (4 月 22 日)

- ⋆ 休み (祝日) (4 月 29 日)
- ⋆ 休み (振替休日) (5 月 6 日)

4. 集合の記法 (1)：外延的記法と内包的記法 (5 月 13 日)
5. 集合の記法 (2)：直積と冪集合 (5 月 20 日)
6. 証明法 (4)：集合に関する証明 (5 月 27 日)
7. 関数 (1)：像と逆像 (6 月 3 日)

- 中間試験 (6 月 10 日)

スケジュール 後半 (予定)

8. 関数 (2)：全射と単射 (6 月 17 日)
- ⋆ 休講 (海外出張) (6 月 24 日)
- ⋆ 休講 (海外出張) (7 月 1 日)
9. 関係 (1)：関係 (7 月 8 日)
10. 関係 (2)：同値関係 (7 月 15 日)
11. 関係 (3)：順序関係 (7 月 22 日)
12. 証明法 (5)：数学的帰納法 (7 月 29 日)
13. 集合の記法 (3)：集合の再帰的定義 (8 月 5 日)
- 期末試験 (8 月 12 日？)

注意：予定の変更もありうる

今日の概要

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 同値関係と分割の関係を理解する
  - 分割とは？
  - 分割から同値関係へ
  - 同値関係から分割へ
    - 同値分割と商集合

同値関係

集合 A と A 上の関係 R

同値関係とは？

R が同値関係であるとは，次を満たすこと

- R は反射性を持つ
- R は対称性を持つ
- R は推移性を持つ

- 反射性：任意の $x \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$
- 対称性：任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ ならば $y \mathrel{\mathrm{R}} x$
- 推移性：任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ ならば $x \mathrel{\mathrm{R}} z$

同値関係を表す記号

同値関係を表すために，R ではなくて，特別な記号を使うことが多い

同値関係を表す記号の例

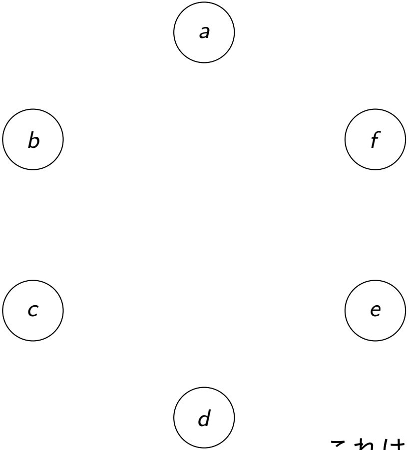
- $=$
- $\equiv$
- $\sim$
- $\simeq$
- $\approx$
- $\ldots$

その否定を表す記号の例

- $\neq$
- $\not\equiv$
- $\nsim$
- $\not\simeq$
- $\not\approx$
- $\ldots$

状況に応じて，使い分けられたりする

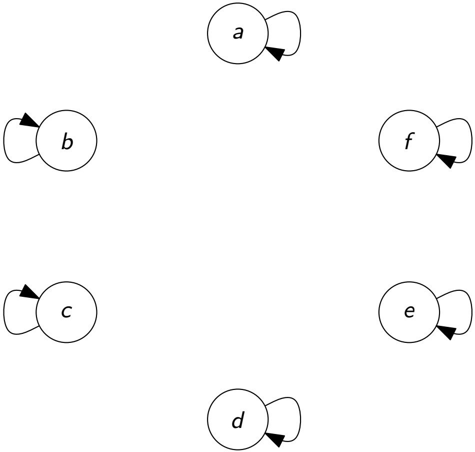
これが同値関係を表すグラフだとすると？



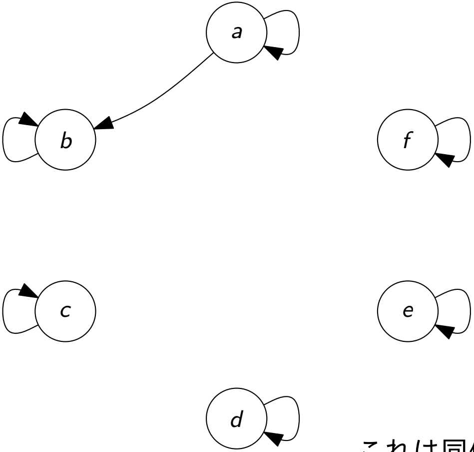
これは同値関係を表さない

同値関係をグラフで描くとき...

これが同値関係を表すグラフだとすると？

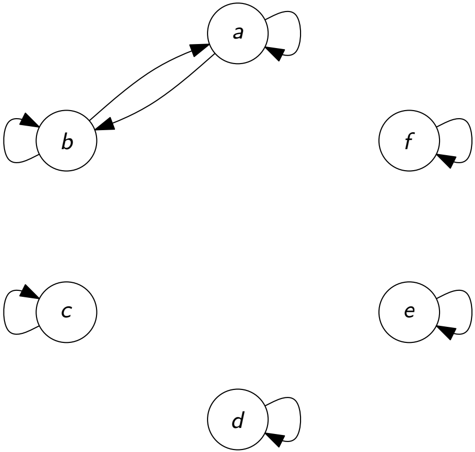


これが同値関係を表すグラフだとすると？



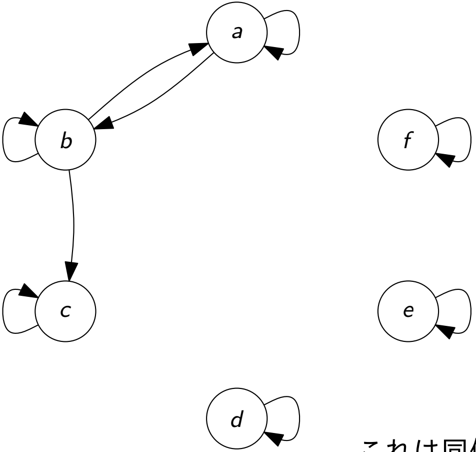
これは同値関係を表さない

これが同値関係を表すグラフだとすると？



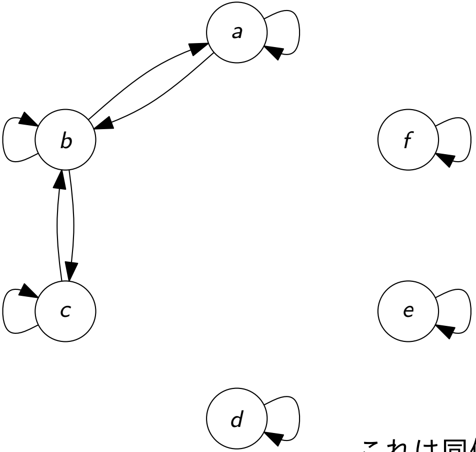
同値関係をグラフで描くとき...

これが同値関係を表すグラフだとすると？



これは同値関係を表さない

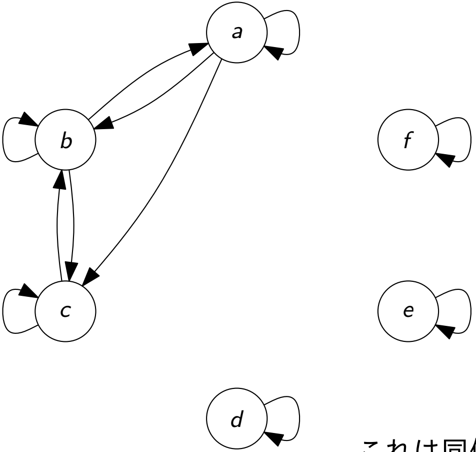
これが同値関係を表すグラフだとすると？



これは同値関係を表さない

同値関係をグラフで描くとき...

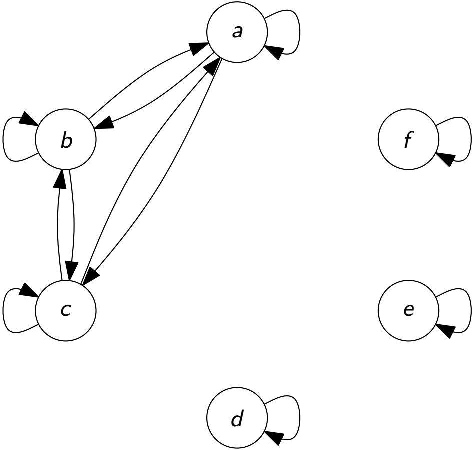
これが同値関係を表すグラフだとすると？



これは同値関係を表さない

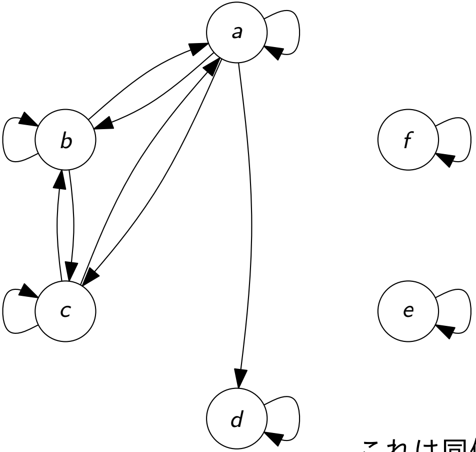
同値関係をグラフで描くとき...

これが同値関係を表すグラフだとすると？



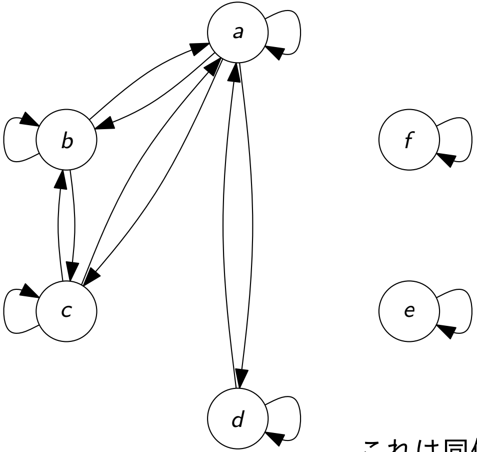
同値関係をグラフで描くとき...

これが同値関係を表すグラフだとすると？



これは同値関係を表さない

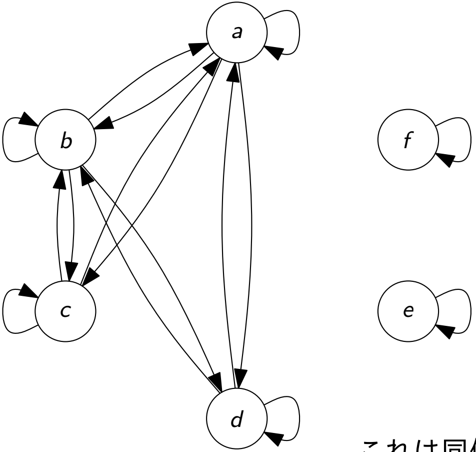
これが同値関係を表すグラフだとすると？



これは同値関係を表さない

同値関係をグラフで描くとき...

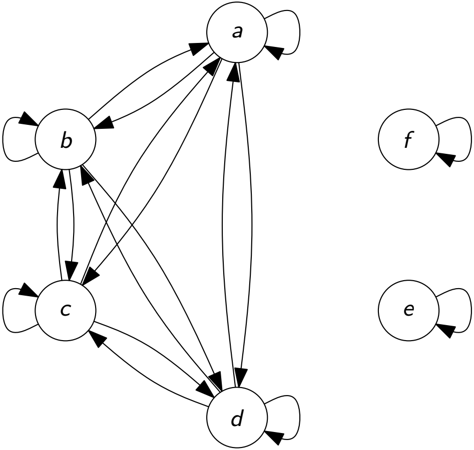
これが同値関係を表すグラフだとすると？



これは同値関係を表さない

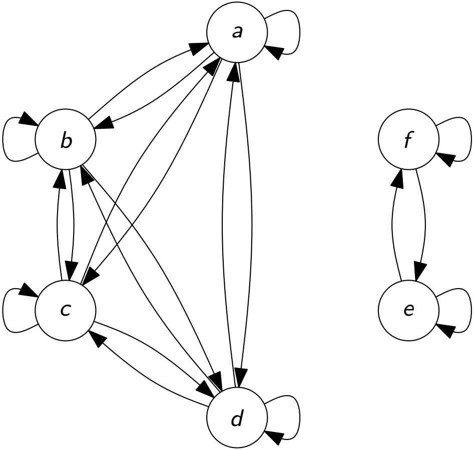
同値関係をグラフで描くとき...

これが同値関係を表すグラフだとすると？

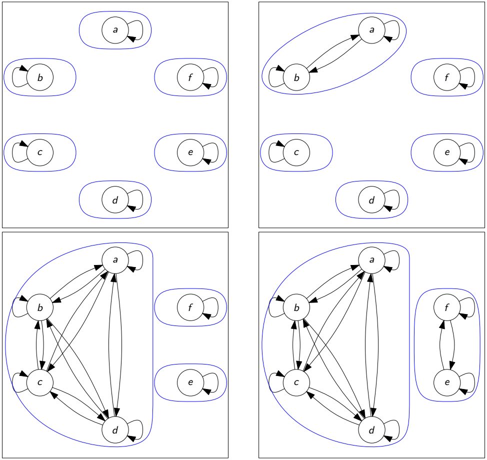


同値関係をグラフで描くとき…

これが同値関係を表すグラフだとすると？



同値関係が与える「かたまり」への分割



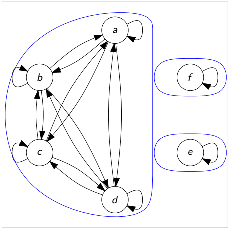
今日の目標

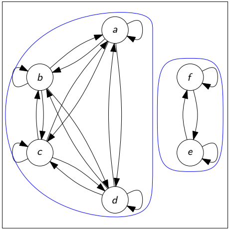
今から行うこと

次を証明する

- 「同値関係」から「『かたまり』への分割」が得られること
- 「『かたまり』への分割」から「同値関係」が得られること

つまり,「同値関係」と「分割」は同じものを別の方法で表現している





目次

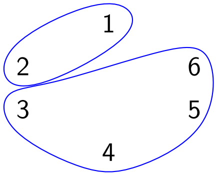
集合の分割

分割とは？

集合 A の分割とは次を満たすような集合 P のこと

- 任意の $X \in P$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$ (非空性)
- 任意の $X, Y \in P$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$ (素性)
- 任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ (被覆性)

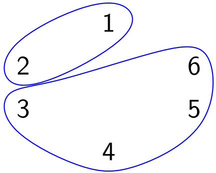
例：$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ のとき，$\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$ は A の分割



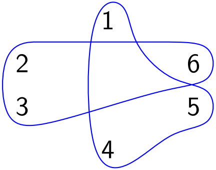
分割とは?: 例 (続き)

次の 4 つはどれも $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の分割

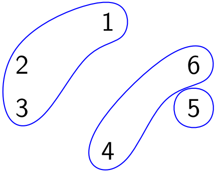
$\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$



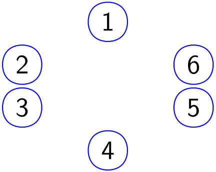
$\{\{1, 4, 5\}, \{2, 3, 6\}\}$



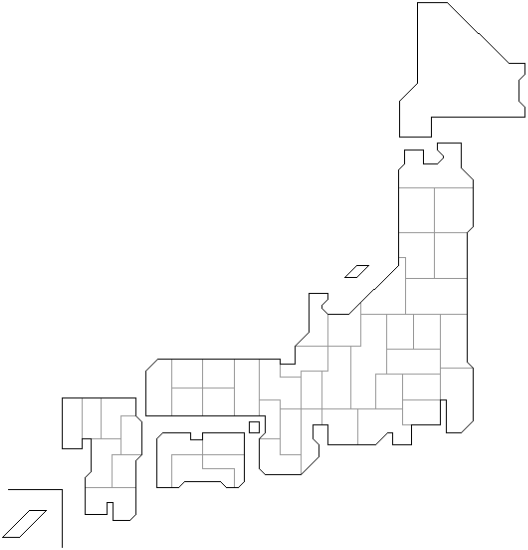
$\{\{1, 2, 3\}, \{4, 6\}, \{5\}\}$



$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$

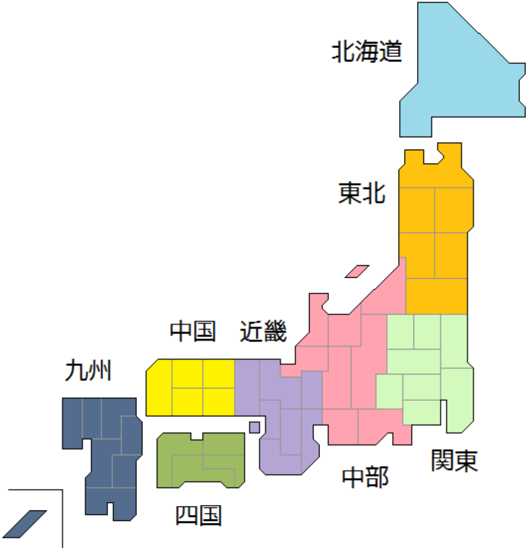


分割の例 1：日本の八地方区分



http://www.craftmap.box-i.net/

分割の例 1：日本の八地方区分



http://www.craftmap.box-i.net/

分割の例 2：カレンダー

1ヵ月の 31 日をいろいろな方法で分割している

日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

- 1 日 1 日で分割 (31 個の集合へ分割)
- 週ごとに分割 (5 個の集合へ分割)
- 曜日ことに分割 (7 個の集合へ分割)
- …

目次

分割から同値関係へ

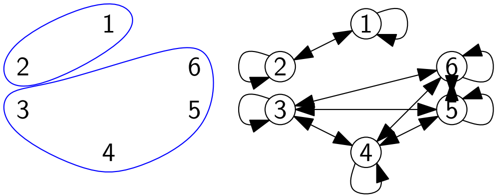
集合 A の分割 P を考える

分割から同値関係へ

- A 上の関係 R を，任意の $x, y \in A$ に対して $x \,\mathrm{R}\, y$ であることを

  $$\text{ある } X \in P \text{ が存在して,} x \in X \text{ かつ } y \in X \text{ である}$$

  こととして定義する
- このとき，R は A 上の同値関係である



分割から同値関係へ：証明 (反射性)

証明すべきこと (1)：反射性

任意の $x \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$

分割から同値関係へ：証明 (反射性)

証明すべきこと (1)：反射性

任意の $x \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$

定義に立ち戻って書きなおす

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $x \in X$

分割から同値関係へ：証明 (反射性)

証明すべきこと (1)：反射性

任意の $x \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$

定義に立ち戻って書きなおす

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $x \in X$

証明：任意に $x \in A$ を選ぶ．

- したがって，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$． □

分割から同値関係へ：証明 (反射性)

証明すべきこと (1)：反射性

任意の $x \in A$ に対して，$x \mathrel{R} x$

定義に立ち戻って書きなおす

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $x \in X$

証明：任意に $x \in A$ を選ぶ．

- P は A の分割なので，分割の被覆性から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$．
- したがって，$x \mathrel{R} x$． □

分割から同値関係へ：証明 (反射性)

証明すべきこと (1)：反射性

任意の $x \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$

定義に立ち戻って書きなおす

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $x \in X$

証明：任意に $x \in A$ を選ぶ.

- P は A の分割なので，分割の被覆性から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$.
- したがって，ある $X \in P$ が存在して $x \in X$ かつ $x \in X$.
- したがって，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$. □

分割から同値関係へ：証明 (対称性)

証明すべきこと (2)：対称性

任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ ならば $y \mathrel{\mathrm{R}} x$

分割から同値関係へ：証明 (対称性)

証明すべきこと (2)：対称性

任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ ならば $y \mathrel{\mathrm{R}} x$

定義に立ち戻って書きなおす

任意の $x, y \in A$ に対して，
「ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$」ならば
「ある $X \in P$ が存在して，$y \in X$ かつ $x \in X$」

分割から同値関係へ：証明 (対称性)

証明すべきこと (2)：対称性

任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ ならば $y \mathrel{\mathrm{R}} x$

定義に立ち戻って書きなおす

任意の $x, y \in A$ に対して，
「ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$」ならば
「ある $X \in P$ が存在して，$y \in X$ かつ $x \in X$」

証明：任意に $x, y \in A$ を選び，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ と仮定する．

- したがって，$y \mathrel{\mathrm{R}} x$. □

分割から同値関係へ：証明 (対称性)

証明すべきこと (2)：対称性

任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ ならば $y \mathrel{\mathrm{R}} x$

定義に立ち戻って書きなおす

任意の $x, y \in A$ に対して，
「ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$」ならば
「ある $X \in P$ が存在して，$y \in X$ かつ $x \in X$」

証明：任意に $x, y \in A$ を選び，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ と仮定する．

- R の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$．
- したがって，$y \mathrel{\mathrm{R}} x$． □

分割から同値関係へ：証明 (対称性)

証明すべきこと (2)：対称性

任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ ならば $y \mathrel{\mathrm{R}} x$

定義に立ち戻って書きなおす

任意の $x, y \in A$ に対して，
「ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$」ならば
「ある $X \in P$ が存在して，$y \in X$ かつ $x \in X$」

証明：任意に $x, y \in A$ を選び，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ と仮定する．

- R の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$.
- すなわち，ある $X \in P$ が存在して，$y \in X$ かつ $x \in X$.
- したがって，$y \mathrel{\mathrm{R}} x$. □

分割から同値関係へ：証明 (推移性)

証明すべきこと (3)：推移性

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ ならば $x \mathrel{\mathrm{R}} z$

証明：任意に $x, y, z \in A$ を選び，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ と仮定する．

- したがって，$x \mathrel{\mathrm{R}} z$. □

分割から同値関係へ：証明 (推移性)

証明すべきこと (3)：推移性

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ ならば $x \mathrel{\mathrm{R}} z$

証明：任意に $x, y, z \in A$ を選び，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ と仮定する．

- R の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$.
- したがって，$x \mathrel{\mathrm{R}} z$. □

分割から同値関係へ：証明 (推移性)

証明すべきこと (3)：推移性

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ ならば $x \mathrel{\mathrm{R}} z$

証明：任意に $x, y, z \in A$ を選び，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ と仮定する．

- R の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$.
- 同様に，ある $X' \in P$ が存在して，$y \in X'$ かつ $z \in X'$.
- したがって，$x \mathrel{\mathrm{R}} z$. □

分割から同値関係へ：証明 (推移性)

証明すべきこと (3)：推移性

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ ならば $x \mathrel{\mathrm{R}} z$

証明：任意に $x, y, z \in A$ を選び，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ と仮定する．

- R の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$.
- 同様に，ある $X' \in P$ が存在して，$y \in X'$ かつ $z \in X'$.
- $y \in X$ と $y \in X'$ から，$y \in X \cap X'$.

- したがって，$x \mathrel{\mathrm{R}} z$. □

分割から同値関係へ：証明 (推移性)

証明すべきこと (3)：推移性

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ ならば $x \mathrel{\mathrm{R}} z$

証明：任意に $x, y, z \in A$ を選び，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ と仮定する．

- R の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$.
- 同様に，ある $X' \in P$ が存在して，$y \in X'$ かつ $z \in X'$.
- $y \in X$ と $y \in X'$ から，$y \in X \cap X'$.
- 特に，$X \cap X' \neq \emptyset$.

- したがって，$x \mathrel{\mathrm{R}} z$. □

分割から同値関係へ：証明 (推移性)

証明すべきこと (3)：推移性

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ ならば $x \mathrel{\mathrm{R}} z$

証明：任意に $x, y, z \in A$ を選び，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ と仮定する．

- R の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$.
- 同様に，ある $X' \in P$ が存在して，$y \in X'$ かつ $z \in X'$.
- $y \in X$ と $y \in X'$ から，$y \in X \cap X'$.
- 特に，$X \cap X' \neq \emptyset$.
- 分割の素性から，$X = X'$.

- したがって，$x \mathrel{\mathrm{R}} z$. □

分割から同値関係へ：証明 (推移性)

証明すべきこと (3)：推移性

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ ならば $x \mathrel{\mathrm{R}} z$

証明：任意に $x, y, z \in A$ を選び，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ と仮定する．

- R の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$.
- 同様に，ある $X' \in P$ が存在して，$y \in X'$ かつ $z \in X'$.
- $y \in X$ と $y \in X'$ から，$y \in X \cap X'$.
- 特に，$X \cap X' \neq \emptyset$.
- 分割の素性から，$X = X'$.
- したがって，$x \in X$ かつ $z \in X$.
- したがって，$x \mathrel{\mathrm{R}} z$. □

目次

同値類

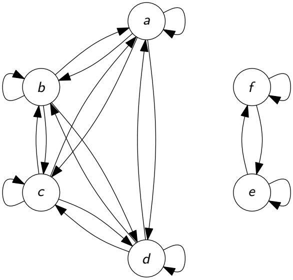
集合 A 上の同値関係 R を考える

同値類とは？

同値関係 R における要素 $a \in A$ の**同値類**とは

$$\{x \mid x \in A \text{ かつ } x \mathrel{\mathrm{R}} a\}$$

という集合のことであり，これを $[a]_{\mathrm{R}}$ とも書く



- $[a]_{\mathrm{R}} = \{a, b, c, d\}$
- $[b]_{\mathrm{R}} = \{a, b, c, d\}$
- $[c]_{\mathrm{R}} = \{a, b, c, d\}$
- $[d]_{\mathrm{R}} = \{a, b, c, d\}$
- $[e]_{\mathrm{R}} = \{e, f\}$
- $[f]_{\mathrm{R}} = \{e, f\}$

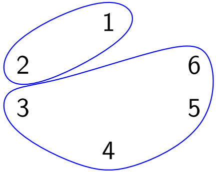
商集合

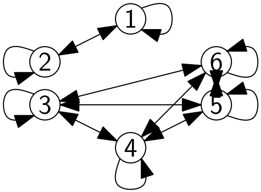
商集合とは？

集合 A 上の同値関係 R に対して，

$$A \,/\, \mathrm{R} = \{[a]_{\mathrm{R}} \mid a \in A\}$$

を R に関する A の**商集合**と呼ぶ．





$A \,/\, \mathrm{R} = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$

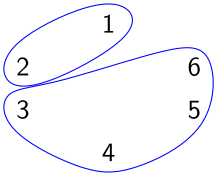
同値関係から分割へ

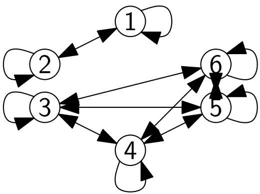
集合 A 上の同値関係 R を考える

同値関係から分割へ

商集合 A / R は A の分割である

これゆえ，R に関する A の商集合のことを，R に関する A の同値分割とも呼ぶ





同値関係から分割へ：証明 (非空性)

証明すべきこと (1)：非空性

任意の $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明：任意に $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ を選ぶ.

- したがって，$X \subseteq A$.
- したがって，$X \neq \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (非空性)

証明すべきこと (1)：非空性

任意の $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明：任意に $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ を選ぶ.

- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- したがって，$X \subseteq A$.
- したがって，$X \neq \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (非空性)

証明すべきこと (1)：非空性

任意の $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明：任意に $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ を選ぶ.

- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- 同値類の定義から，$[a]_{\mathrm{R}} \subseteq A$.
- したがって，$X \subseteq A$.
- したがって，$X \neq \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (非空性)

証明すべきこと (1)：非空性

任意の $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明：任意に $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ を選ぶ．

- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- 同値類の定義から，$[a]_{\mathrm{R}} \subseteq A$.
- したがって，$X \subseteq A$.
- したがって，$[a]_{\mathrm{R}} \neq \emptyset$.
- したがって，$X \neq \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (非空性)

証明すべきこと (1)：非空性

任意の $X \in A / \mathrm{R}$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明：任意に $X \in A / \mathrm{R}$ を選ぶ.

- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- 同値類の定義から，$[a]_{\mathrm{R}} \subseteq A$.
- したがって，$X \subseteq A$.
- 同値関係の反射性から，$a \mathrel{\mathrm{R}} a$.
- したがって，$[a]_{\mathrm{R}} \neq \emptyset$.
- したがって，$X \neq \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (非空性)

証明すべきこと (1)：非空性

任意の $X \in A / \mathrm{R}$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明：任意に $X \in A / \mathrm{R}$ を選ぶ．

- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$．
- 同値類の定義から，$[a]_{\mathrm{R}} \subseteq A$．
- したがって，$X \subseteq A$．

- 同値関係の反射性から，$a \mathrel{\mathrm{R}} a$．
- 同値類の定義から，$a \in [a]_{\mathrm{R}}$．
- したがって，$[a]_{\mathrm{R}} \neq \emptyset$．
- したがって，$X \neq \emptyset$． □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

証明：任意に $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ を選ぶ.

- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A / \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

証明：任意に $X, Y \in A / \mathrm{R}$ を選ぶ.

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する. .... (1)

- したがって，$X = Y$.
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

証明：任意に $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ を選ぶ.

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する. .... (1)
- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- したがって，$X = Y$.
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

証明：任意に $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ を選ぶ.

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する. .... (1)
- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_{\mathrm{R}}$.

- したがって，$X = Y$.
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A / \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

証明：任意に $X, Y \in A / \mathrm{R}$ を選ぶ.

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する． . . . . (1)
- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_{\mathrm{R}}$.
- 仮定 (1) より，ある $a'' \in A$ が存在して，$a'' \in X$ かつ $a'' \in Y$.

- したがって，$X = Y$.
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

証明：任意に $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ を選ぶ.

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する. .... (1)
- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_{\mathrm{R}}$.
- 仮定 (1) より，ある $a'' \in A$ が存在して，$a'' \in X$ かつ $a'' \in Y$.
- すなわち，$a'' \in [a]_{\mathrm{R}}$ かつ $a'' \in [a']_{\mathrm{R}}$.

- したがって，$X = Y$.
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

証明：任意に $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ を選ぶ.

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する． . . . . (1)
- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_{\mathrm{R}}$.
- 仮定 (1) より，ある $a'' \in A$ が存在して，$a'' \in X$ かつ $a'' \in Y$.
- すなわち，$a'' \in [a]_{\mathrm{R}}$ かつ $a'' \in [a']_{\mathrm{R}}$.
- 同値類の定義から，$a'' \mathrel{\mathrm{R}} a$ かつ $a'' \mathrel{\mathrm{R}} a'$.

- したがって，$X = Y$.
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

証明：任意に $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ を選ぶ.

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する. .... (1)
- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_{\mathrm{R}}$.
- 仮定 (1) より，ある $a'' \in A$ が存在して，$a'' \in X$ かつ $a'' \in Y$.
- すなわち，$a'' \in [a]_{\mathrm{R}}$ かつ $a'' \in [a']_{\mathrm{R}}$.
- 同値類の定義から，$a'' \mathrel{\mathrm{R}} a$ かつ $a'' \mathrel{\mathrm{R}} a'$.
- $a'' \mathrel{\mathrm{R}} a$ と同値関係の対称性から，$a \mathrel{\mathrm{R}} a''$.

- したがって，$X = Y$.
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

証明：任意に $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ を選ぶ.

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する. .... (1)
- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_{\mathrm{R}}$.
- 仮定 (1) より，ある $a'' \in A$ が存在して，$a'' \in X$ かつ $a'' \in Y$.
- すなわち，$a'' \in [a]_{\mathrm{R}}$ かつ $a'' \in [a']_{\mathrm{R}}$.
- 同値類の定義から，$a'' \mathrel{\mathrm{R}} a$ かつ $a'' \mathrel{\mathrm{R}} a'$.
- $a'' \mathrel{\mathrm{R}} a$ と同値関係の対称性から，$a \mathrel{\mathrm{R}} a''$.
- $a \mathrel{\mathrm{R}} a''$，$a'' \mathrel{\mathrm{R}} a'$ と同値関係の推移性から，$a \mathrel{\mathrm{R}} a'$.

- したがって，$X = Y$.
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

証明：任意に $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ を選ぶ.

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する. .... (1)
- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_{\mathrm{R}}$.
- 仮定 (1) より，ある $a'' \in A$ が存在して，$a'' \in X$ かつ $a'' \in Y$.
- すなわち，$a'' \in [a]_{\mathrm{R}}$ かつ $a'' \in [a']_{\mathrm{R}}$.
- 同値類の定義から，$a'' \mathrel{\mathrm{R}} a$ かつ $a'' \mathrel{\mathrm{R}} a'$.
- $a'' \mathrel{\mathrm{R}} a$ と同値関係の対称性から，$a \mathrel{\mathrm{R}} a''$.
- $a \mathrel{\mathrm{R}} a''$，$a'' \mathrel{\mathrm{R}} a'$ と同値関係の推移性から，$a \mathrel{\mathrm{R}} a'$.
- $a \mathrel{\mathrm{R}} a'$ から，$[a]_{\mathrm{R}} = [a']_{\mathrm{R}}$. (演習問題)
- したがって，$X = Y$.
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (被覆性)

証明すべきこと (3)：被覆性

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ が存在して，$x \in X$

証明：任意に $x \in A$ を選ぶ．

同値関係から分割へ：証明 (被覆性)

証明すべきこと (3)：被覆性

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ が存在して，$x \in X$

証明：任意に $x \in A$ を選ぶ．

- $X = [x]_{\mathrm{R}}$ とする．
- したがって，$x \in X$． $\square$

同値関係から分割へ：証明 (被覆性)

証明すべきこと (3)：被覆性

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ が存在して，$x \in X$

証明：任意に $x \in A$ を選ぶ.

- $X = [x]_{\mathrm{R}}$ とする.
- 反射性から，$x \,\mathrm{R}\, x$.
- したがって，$x \in X$. □

同値関係から分割へ：証明 (被覆性)

証明すべきこと (3)：被覆性

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ が存在して，$x \in X$

証明：任意に $x \in A$ を選ぶ．

- $X = [x]_{\mathrm{R}}$ とする．
- 反射性から，$x \,\mathrm{R}\, x$．
- 同値類の定義から，$x \in [x]_{\mathrm{R}}$．
- したがって，$x \in X$． $\square$

目次

今日のまとめ

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 同値関係と分割の関係を理解する
  - 分割とは？
  - 分割から同値関係へ
  - 同値関係から分割へ
    - 同値分割と商集合

格言

本質的に同一であるものが，異なる表現を持つことはよくある

同値関係	分割
局所的 (local)	大域的 (global)
微視的 (micro)	巨視的 (macro)

目次

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次