離散数学 第 9 回
関係 (1)：関係

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 7 月 8 日

最終更新：2014 年 7 月 9 日　07:57

スケジュール 前半

1. 証明法 (1)：「～が存在する」ことの証明 (4 月 8 日)
2. 証明法 (2)：「任意の～に対して…である」ことの証明 (4 月 15 日)
3. 証明法 (3)：「～ならば…である」ことの証明 (4 月 22 日)

- ⋆ 休み (祝日) (4 月 29 日)
- ⋆ 休み (振替休日) (5 月 6 日)

4. 集合の記法 (1)：外延的記法と内包的記法 (5 月 13 日)
5. 集合の記法 (2)：直積と冪集合 (5 月 20 日)
6. 証明法 (4)：集合に関する証明 (5 月 27 日)
7. 関数 (1)：像と逆像 (6 月 3 日)

- 中間試験 (6 月 10 日)

スケジュール 後半 (予定)

8	関数 (2)：全射と単射	(6 月 17 日)
⋆	休講 (海外出張)	(6 月 24 日)
⋆	休講 (海外出張)	(7 月 1 日)
9	関係 (1)：関係	(7 月 8 日)
10	関係 (2)：同値関係	(7 月 15 日)
11	関係 (3)：順序関係	(7 月 22 日)
12	証明法 (5)：数学的帰納法	(7 月 29 日)
13	集合の記法 (3)：集合の再帰的定義	(8 月 5 日)
•	期末試験	(8 月 12 日？)

注意：予定の変更もありうる

今日の概要

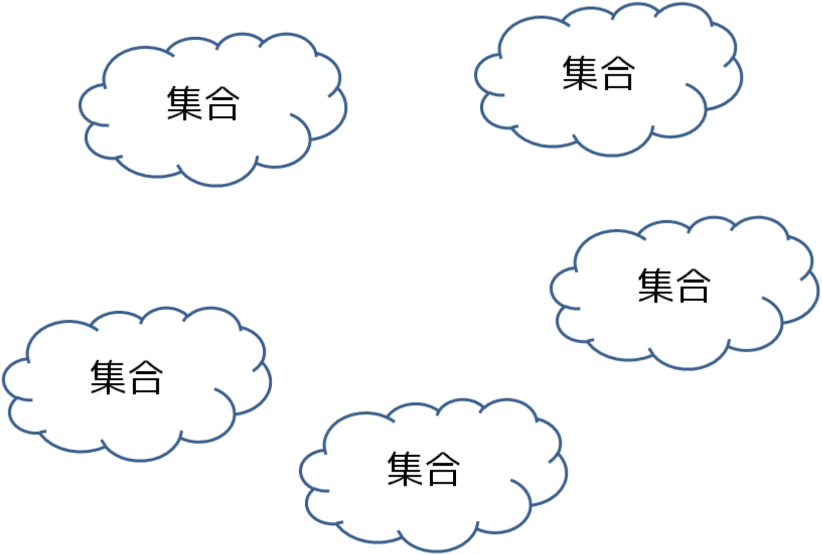
この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

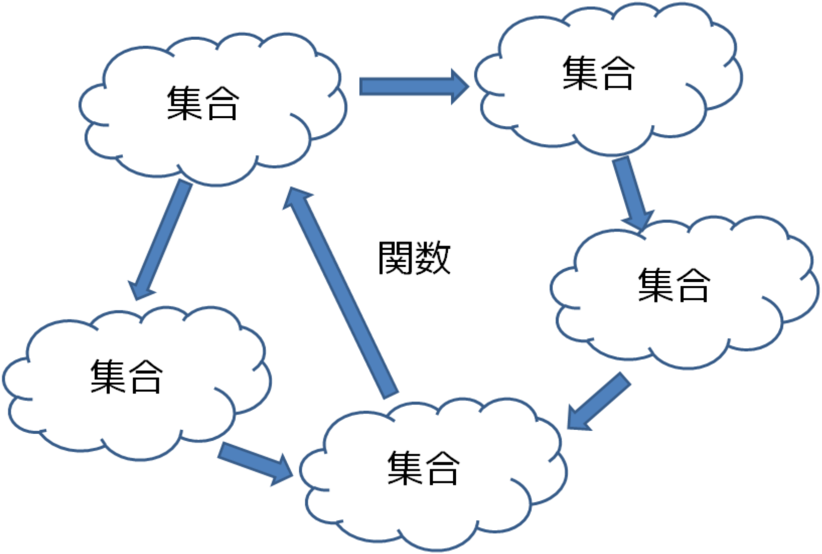
今日の目標

- 関係を理解する
- 関係の性質を理解し，それらを持つかどうか判定できる
  - 反射性，完全性，対称性，反対称性，推移性
- 特殊な関係を理解し，それらの例を挙げられる
  - 順序 (半順序)，全順序，同値関係

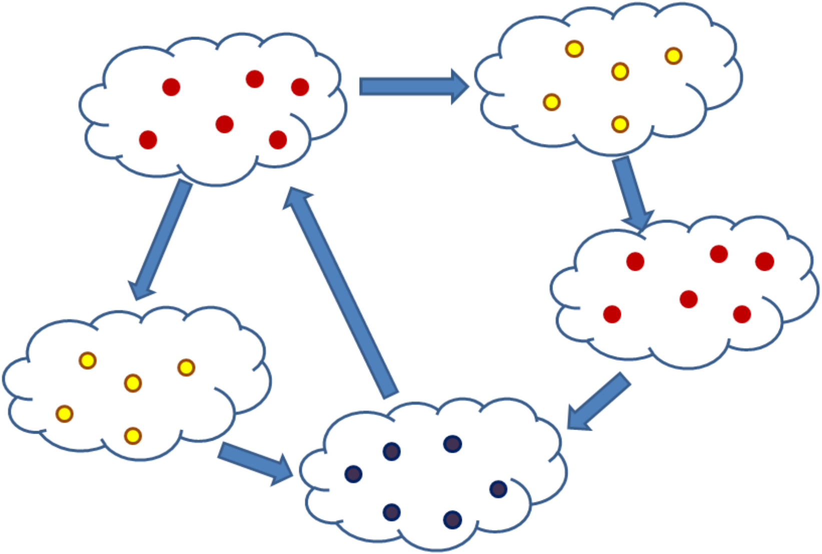
ここまでのまとめ と ここからの話



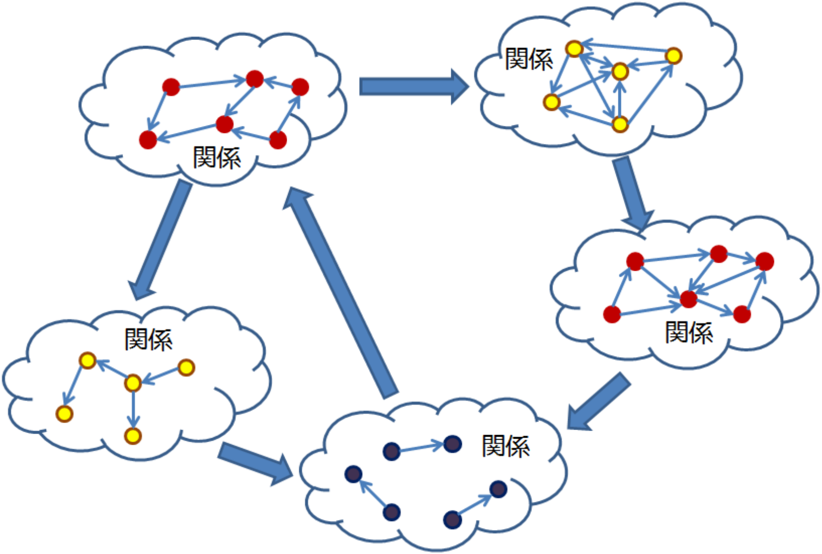
ここまでのまとめ と ここからの話



ここまでのまとめ と ここからの話



ここまでのまとめ と ここからの話



目次

6 の約数は？

問題 1

6 の約数を全部挙げよ

解答：1, 2, 3, 6

$\{a, b\}$ の部分集合は？

問題 2

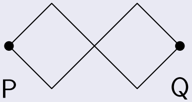
集合 $\{a, b\}$ の部分集合を全部挙げよ

解答：$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$

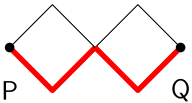
スタートからゴールまで最短で行く方法は？

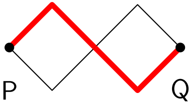
問題 3

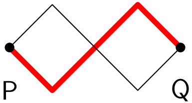
次の図の P から Q まで最短でいく方法を全部挙げよ

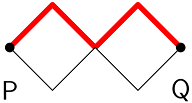


解答：









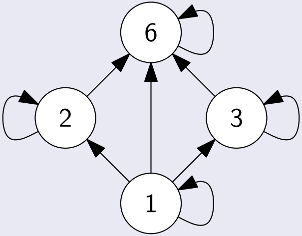
6 の約数は？ 再登場

問題 1

6 の約数を全部挙げよ

解答：1, 2, 3, 6

「m は n の約数」のとき，m から n に矢印を引いて絵を描く



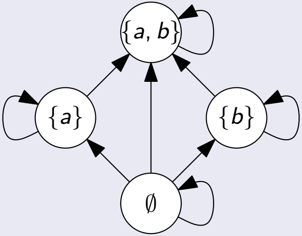
$\{a, b\}$ の部分集合は？

問題 2

集合 $\{a, b\}$ の部分集合を全部挙げよ

解答：$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$

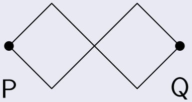
「A は B の部分集合」のとき，A から B に矢印を引いて絵を描く



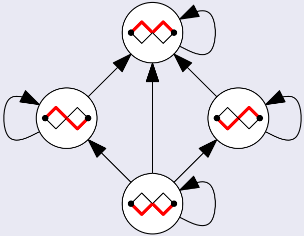
スタートからゴールまで最短で行く方法は？

問題 3

次の図の P から Q まで最短でいく方法を全部挙げよ



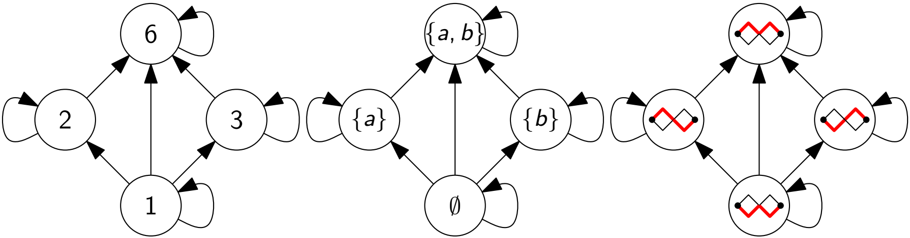
「経路 1 が経路 2 の上にいかない」とき，経路 1 から 2 に矢印を...



共通点？ なぜ？

この 3 つは「同じ形」をしている

- 「同じ形」とは何？
- なぜ同じ形をしている？



格言

抽象化，それが数学の威力の 1 つ

目次

関係とは？

集合 A

関係とは？ (常識に基づく定義)

A 上の関係は次のように定められるもの

- 関係を表す記号「R」がある (例えば，$\leq$ や $=$ や $\subseteq$)
- 任意の $x, y \in A$ に対して
  「$x \mathrel{\mathrm{R}} y$」が成り立つか成り立たないか，のどちらか

注：$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ が成り立っても，$y \mathrel{\mathrm{R}} x$ が成り立つとは限らない

例 1

例 1

- $A = \{1, 2, 3, 6\}$
- 任意の $x, y \in A$ に対して

$$x \mid y \text{ であることを } x \text{ は } y \text{ の約数である}$$

と定義する

$1 \mid 1$	○	$2 \mid 1$	×	$3 \mid 1$	×	$6 \mid 1$	×
$1 \mid 2$	○	$2 \mid 2$	○	$3 \mid 2$	×	$6 \mid 2$	×
$1 \mid 3$	○	$2 \mid 3$	×	$3 \mid 3$	○	$6 \mid 3$	×
$1 \mid 6$	○	$2 \mid 6$	○	$3 \mid 6$	○	$6 \mid 6$	○

補足：整数の整除関係

$\mathbb{Z}_+$ =1 以上の整数をすべて集めた集合

整数の整除関係

整数 $x, y \in \mathbb{Z}_+$ に対して,

- ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して

$$y = xp$$

  と書けるとき，x は y の約数であるという

関係の表現法 (1)：関数

関数としての関係の表現

A 上の関係 R を関数 $A^2 \to \{ \bigcirc, \times \}$,

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \bigcirc & (x \mathrel{\mathrm{R}} y \text{ のとき}) \\ \times & (x \mathrel{\mathrm{R}} y \text{ ではないとき}) \end{cases}$$

で表現する

例 1 の場合

- $(1,1) \mapsto \bigcirc$
- $(1,2) \mapsto \bigcirc$
- $(1,3) \mapsto \bigcirc$
- $(1,6) \mapsto \bigcirc$
- $(2,1) \mapsto \times$
- $(2,2) \mapsto \bigcirc$
- $(2,3) \mapsto \times$
- $(2,6) \mapsto \bigcirc$
- $(3,1) \mapsto \times$
- $(3,2) \mapsto \times$
- $(3,3) \mapsto \bigcirc$
- $(3,6) \mapsto \bigcirc$
- $(6,1) \mapsto \times$
- $(6,2) \mapsto \times$
- $(6,3) \mapsto \times$
- $(6,6) \mapsto \bigcirc$

関係の表現法 (2)：集合

集合としての関係の表現

A 上の関係 R を集合

$$\{(x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in A \text{ かつ } x \mathrel{\mathrm{R}} y\}$$

で表現する

例 1 の場合

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,6),(2,2),(2,6),(3,3),(3,6),(6,6)\}$$

関係の表現法 (3)：グラフ

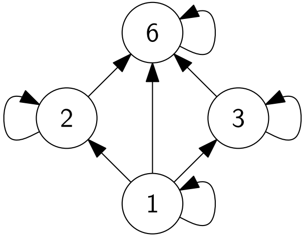
グラフとしての関係の表現

A 上の関係 R を

- 頂点集合を A として，
- $x \mathrel{\mathrm{R}} y$ であるとき，そのときに限り $x \to y$ という矢印を引く

グラフで表現する

例 1 の場合



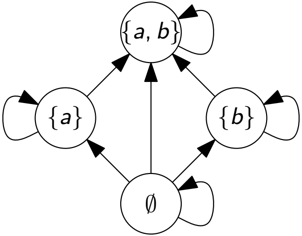
例 2

例 2

- $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- 任意の $X, Y \in A$ に対して

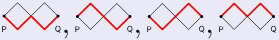
$$X \subseteq Y \text{ であることを } X \text{ は } Y \text{ の部分集合である}$$

と定義する



例 3

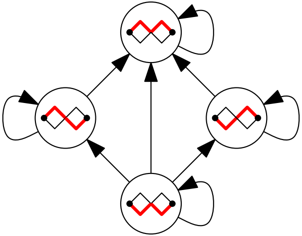
例 3

- $A = \{$  $\}$

- 任意の $X, Y \in A$ に対して

$$X \preceq Y \text{ であることを } X \text{ は } Y \text{ の上に来ない}$$

と定義する



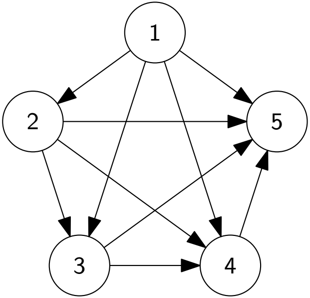
例 4

例 4

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- 任意の $x, y \in A$ に対して

$$x < y \text{ であることを } x \text{ は } y \text{ より小さい}$$

と定義する



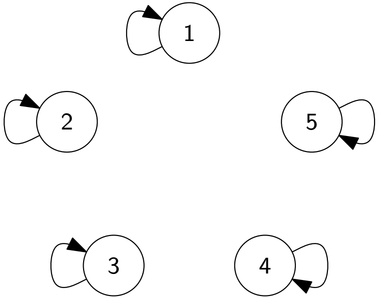
例 5

例 5

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- 任意の $x, y \in A$ に対して

$$x = y \text{ であることを } x \text{ は } y \text{ と等しい}$$

と定義する



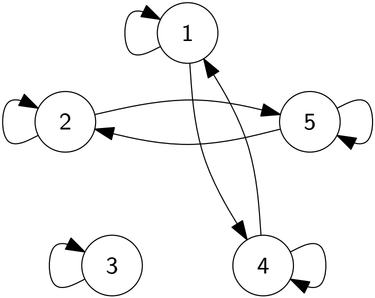
例 6

例 6

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- 任意の $x, y \in A$ に対して

$$x \equiv_3 y \text{ であることを } x \equiv y \pmod 3$$

と定義する



補足：合同な整数

合同な整数

0 以上の整数 m, n と 1 以上の整数 p を考える

- $m - n$ が p で割り切れるとき，すなわち，
  ある整数 q が存在して
  $$m - n = pq$$
  と書けるとき，$m \equiv n \pmod{p}$ と表記する
- $m \equiv n \pmod{p}$ であるとき
  「m と n は p を法として合同である」という

例：

- 5 と 11 は 3 を法として合同である
  - $\because\ 5 - 11 = -6 = 3 \cdot (-2)$
- 15869 と 6832 は 1291 を法として合同である
  - $\because\ 15869 - 6832 = 9037 = 1291 \cdot 7$

目次

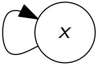
反射性

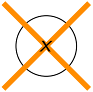
集合 A と A 上の関係 R

反射性とは？

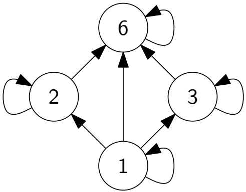
R が反射性を持つとは，次を満たすこと

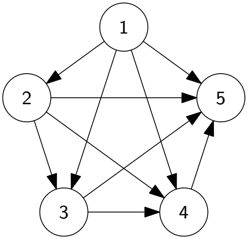
$$任意の\ x \in A\ に対して\ x \mathrel{\mathrm{R}} x$$

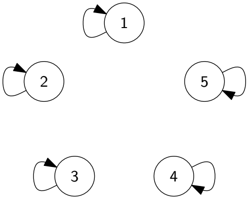


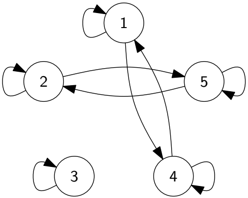


反射性を持つのはどれ？

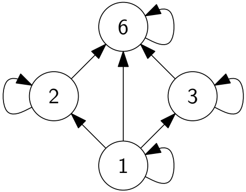




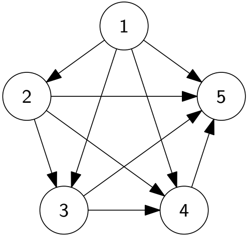




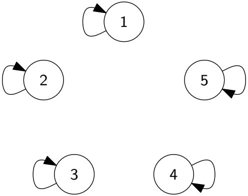
反射性を持つのはどれ？



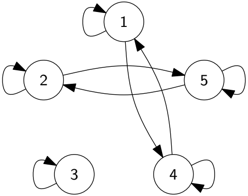
持つ



持たない



持つ



持つ

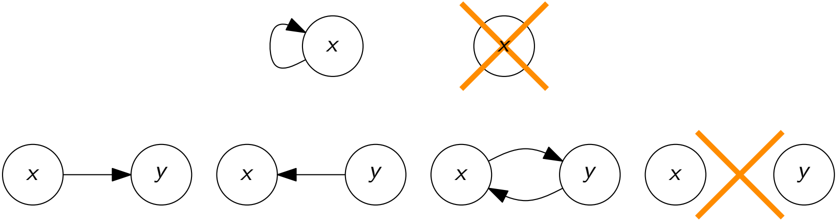
完全性

集合 A と A 上の関係 R

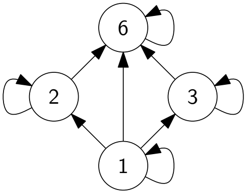
完全性とは？

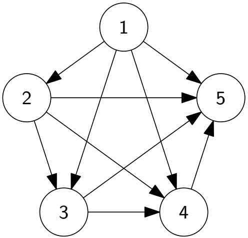
R が完全性を持つとは，次を満たすこと

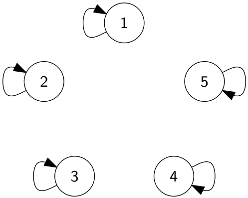
$$\text{任意の } x, y \in A \text{ に対して } x \mathrel{\mathrm{R}} y \text{ または } y \mathrel{\mathrm{R}} x$$

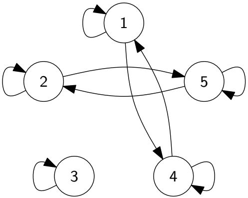


完全性を持つのはどれ？

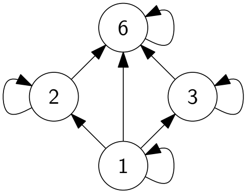




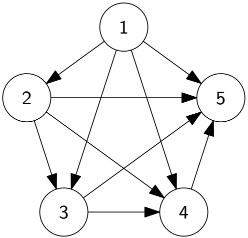




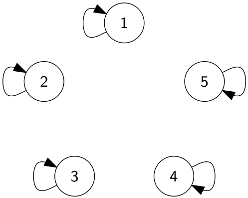
完全性を持つのはどれ？



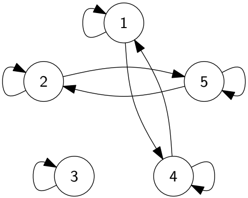
持たない



持たない



持たない



持たない

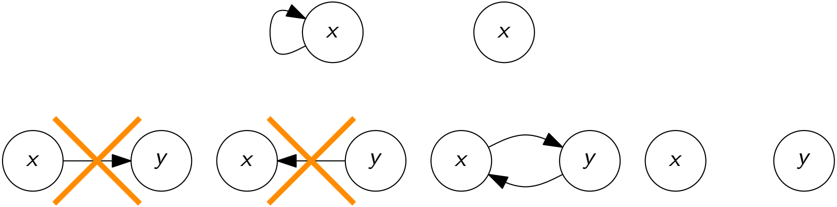
対称性

集合 A と A 上の関係 R

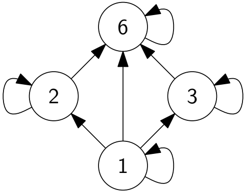
対称性とは？

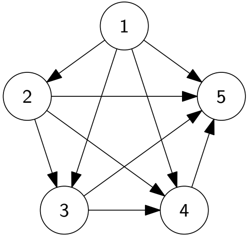
R が対称性を持つとは，次を満たすこと

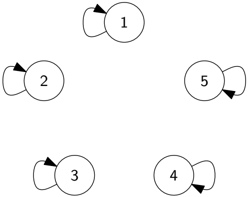
$$\text{任意の } x, y \in A \text{ に対して } x \mathrel{\mathrm{R}} y \text{ ならば } y \mathrel{\mathrm{R}} x$$

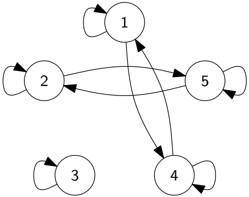


対称性を持つのはどれ？

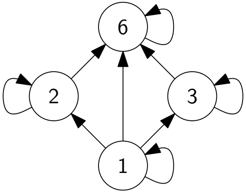




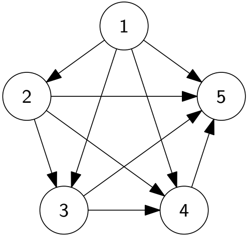




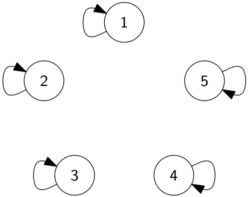
対称性を持つのはどれ？



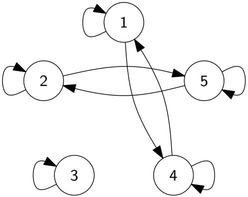
持たない



持たない



持つ



持つ

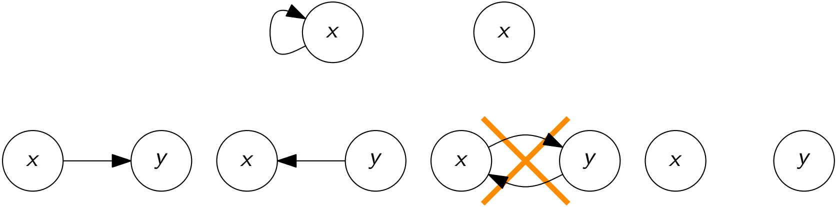
反対称性

集合 A と A 上の関係 R

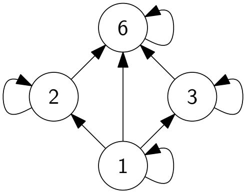
反対称性とは？

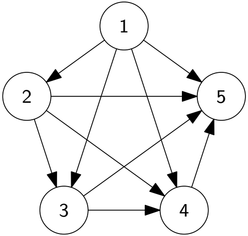
R が**反対称性**を持つとは，次を満たすこと

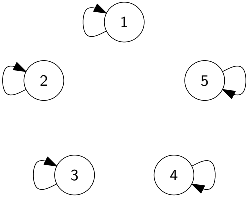
$$\text{任意の } x, y \in A \text{ に対して } x \,\mathrm{R}\, y \text{ かつ } y \,\mathrm{R}\, x \text{ ならば } x = y$$

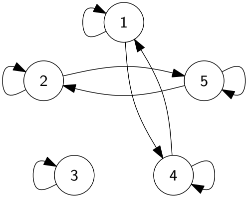


反対称性を持つのはどれ？

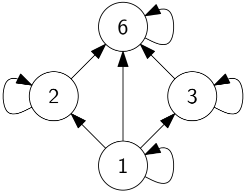




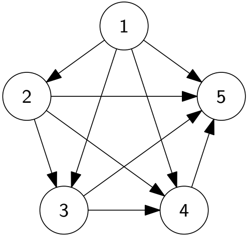




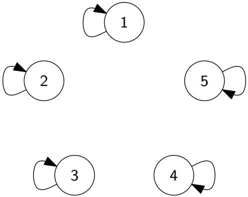
反対称性を持つのはどれ？



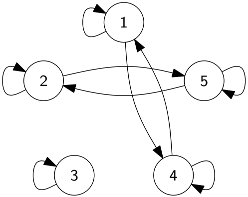
持つ



持つ



持つ



持たない

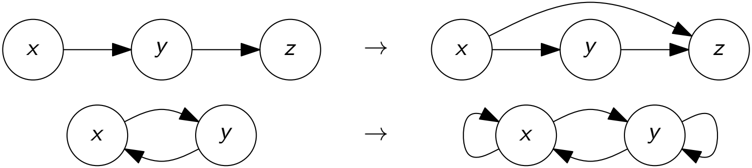
推移性

集合 A と A 上の関係 R

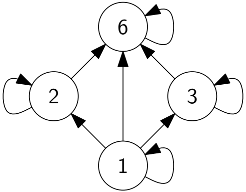
推移性とは？

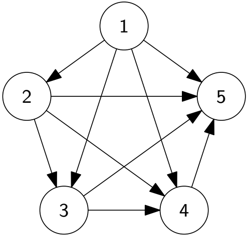
R が推移性を持つとは，次を満たすこと

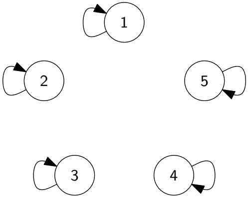
$$\text{任意の } x, y, z \in A \text{ に対して } x \mathrel{\mathrm{R}} y \text{ かつ } y \mathrel{\mathrm{R}} z \text{ ならば } x \mathrel{\mathrm{R}} z$$

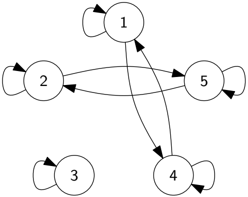


推移性を持つのはどれ？

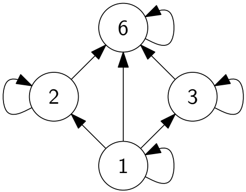




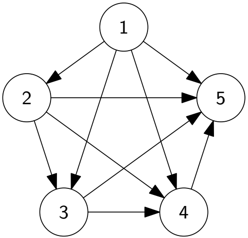




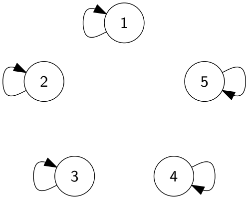
推移性を持つのはどれ？



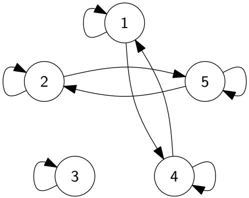
持つ



持つ



持つ



持つ

目次

半順序

集合 A と A 上の関係 R

半順序とは？

R が半順序であるとは，次を満たすこと

- R は反射性を持つ
- R は反対称性を持つ
- R は推移性を持つ

例 1〜6 の中で，例 1，2，3 は半順序

代表的な半順序 (1)

代表的な半順序 (1)：実数の大小関係

$\mathbb{R}$ 上の関係 $\leq$ を，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$x \leq y \text{ であることは } x \text{ が } y \text{ 以下であること}$$

として定義する

代表的な半順序 (1)

代表的な半順序 (1)：実数の大小関係

$\mathbb{R}$ 上の関係 $\leq$ を，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$x \leq y \text{ であることは } x \text{ が } y \text{ 以下であること}$$

として定義する

今からやること

この関係 $\leq$ が半順序であることを証明する

次の 3 つが成り立つことを確認すればよい

- 反射性
- 反対称性
- 推移性

代表的な半順序 (1) 続き

代表的な半順序 (1)：実数の大小関係

$\mathbb{R}$ 上の関係 $\leq$ を，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$x \leq y \text{ であることは } x \text{ が } y \text{ 以下であること}$$

として定義する

反射性：確認

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$x \leq x$

反対称性：確認

任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，$x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$

推移性：確認

任意の $x, y, z \in \mathbb{R}$ に対して，$x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$

代表的な半順序 (2)

代表的な半順序 (2)：集合の包含関係

任意の集合 A の冪集合 2^A 上の関係 $\subseteq$ を，任意の $X, Y \in 2^A$ に対して

$$X \subseteq Y \text{ であることは } X \text{ が } Y \text{ の部分集合であること}$$

として定義する

代表的な半順序 (2)

代表的な半順序 (2)：集合の包含関係

任意の集合 A の冪集合 2^A 上の関係 $\subseteq$ を，任意の $X, Y \in 2^A$ に対して

$X \subseteq Y$ であることは X が Y の部分集合であること

として定義する

今からやること

この関係 $\subseteq$ が半順序であることを証明する

次の 3 つが成り立つことを確認すればよい

- 反射性
- 反対称性
- 推移性

代表的な半順序 (2) 続き

代表的な半順序 (2)：集合の包含関係

任意の集合 A の冪集合 2^A 上の関係 $\subseteq$ を，任意の $X, Y \in 2^A$ に対して

$X \subseteq Y$ であることは X が Y の部分集合であること

として定義する

反射性：確認

任意の $X \in 2^A$ に対して，$X \subseteq X$

反対称性：確認

任意の $X, Y \in 2^A$ に対して，$X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq X$ ならば $X = Y$

推移性：確認

任意の $X, Y, Z \in 2^A$ に対して，$X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq Z$ ならば $X \subseteq Z$

代表的な半順序 (2)：反射性の証明

- $X \in 2^A$ を任意に選ぶ.
- (ここで,「$X \subseteq X$」を証明する)

- したがって，$X \subseteq X$ となる. $\square$

部分集合であることの定義 (復習)

$A \subseteq B$ であるとは,

$$x \in A \text{ ならば } x \in B$$

代表的な半順序 (2)：反射性の証明

- $X \in 2^A$ を任意に選ぶ.
- (ここで,「$X \subseteq X$」を証明する)
- したがって，$X \subseteq X$ となる. □

部分集合であることの定義 (復習)

$A \subseteq B$ であるとは,

$$x \in A \text{ ならば } x \in B$$

「〜ならば…である」という命題の証明法 (第 3 回講義より)

1. 「〜であると仮定する」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. 「〜である」という性質を用いて,「…である」を証明する

代表的な半順序 (2)：反射性の証明

- $X \in 2^A$ を任意に選ぶ．
- $x \in X$ とする．
- このとき，$x \in X$ である．
- したがって，$X \subseteq X$ となる． $\square$

代表的な半順序 (2)：反対称性の証明

- $X, Y \in 2^A$ を任意に選ぶ.
- $X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq X$ であると仮定する.
- (ここで,「$X = Y$」を証明する)
- したがって，$X = Y$ となる. $\square$

集合が同じであることの定義 (復習)

$A = B$ であることを次が成り立つことと定義する

$$A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq A$$

代表的な半順序 (2)：反対称性の証明

- $X, Y \in 2^A$ を任意に選ぶ.
- $X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq X$ であると仮定する.
- 仮定より，$X = Y$ となる. □

集合が同じであることの定義 (復習)

$A = B$ であることを次が成り立つことと定義する

$$A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq A$$

代表的な半順序 (2)：推移性の証明

- $X, Y, Z \in 2^A$ を任意に選ぶ.
- $X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq Z$ であると仮定する.
- (ここで「$X \subseteq Z$」を証明する)
- したがって，$X \subseteq Z$ となる. □

代表的な半順序 (2)：推移性の証明

- $X, Y, Z \in 2^A$ を任意に選ぶ.
- $X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq Z$ であると仮定する.
- $x \in X$ であると仮定する.
- (ここで「$x \in Z$」を証明する)
- したがって，$x \in Z$ となる.
- したがって，$X \subseteq Z$ となる. $\square$

代表的な半順序 (2)：推移性の証明

- $X, Y, Z \in 2^A$ を任意に選ぶ.
- $X \subseteq Y$ かつ .... (1)
  $Y \subseteq Z$ であると仮定する. .... (2)
- $x \in X$ であると仮定する. .... (3)
-
-
-
- $x \in Z$ となる.
- したがって，$X \subseteq Z$ となる. □

代表的な半順序 (2)：推移性の証明

- $X, Y, Z \in 2^A$ を任意に選ぶ．
- $X \subseteq Y$ かつ .... (1)
  $Y \subseteq Z$ であると仮定する． .... (2)
- $x \in X$ であると仮定する． .... (3)
- (1) より，$x \in X$ ならば $x \in Y$ となる． .... (4)
-
-
- $x \in Z$ となる．
- したがって，$X \subseteq Z$ となる． □

代表的な半順序 (2)：推移性の証明

- $X, Y, Z \in 2^A$ を任意に選ぶ．
- $X \subseteq Y$ かつ ……………………………… (1)
  $Y \subseteq Z$ であると仮定する． ……………………………… (2)
- $x \in X$ であると仮定する． ……………………………… (3)
- (1) より，$x \in X$ ならば $x \in Y$ となる． ……………………………… (4)
- (3) と (4) より，$x \in Y$． ……………………………… (5)
-
- $x \in Z$ となる．
- したがって，$X \subseteq Z$ となる． □

代表的な半順序 (2)：推移性の証明

- $X, Y, Z \in 2^A$ を任意に選ぶ．
- $X \subseteq Y$ かつ .... (1)
  $Y \subseteq Z$ であると仮定する． .... (2)
- $x \in X$ であると仮定する． .... (3)
- (1) より，$x \in X$ ならば $x \in Y$ となる． .... (4)
- (3) と (4) より，$x \in Y$． .... (5)
- (2) より，$x \in Y$ ならば $x \in Z$ となる． .... (6)
- $x \in Z$ となる．
- したがって，$X \subseteq Z$ となる． □

代表的な半順序 (2)：推移性の証明

- $X, Y, Z \in 2^A$ を任意に選ぶ．
- $X \subseteq Y$ かつ .... (1)
  $Y \subseteq Z$ であると仮定する． .... (2)
- $x \in X$ であると仮定する． .... (3)
- (1) より，$x \in X$ ならば $x \in Y$ となる． .... (4)
- (3) と (4) より，$x \in Y$． .... (5)
- (2) より，$x \in Y$ ならば $x \in Z$ となる． .... (6)
- (5) と (6) より，$x \in Z$ となる．
- したがって，$X \subseteq Z$ となる． □

代表的な半順序 (2) まとめ

代表的な半順序 (2)：集合の包含関係

任意の集合 A の冪集合 2^A 上の関係 $\subseteq$ を，任意の $X, Y \in 2^A$ に対して

$$X \subseteq Y \text{ であることは } X \text{ が } Y \text{ の部分集合であること}$$

として定義する

反射性：確認

任意の $X \in 2^A$ に対して，$X \subseteq X$

反対称性：確認

任意の $X, Y \in 2^A$ に対して，$X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq X$ ならば $X = Y$

推移性：確認

任意の $X, Y, Z \in 2^A$ に対して，$X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq Z$ ならば $X \subseteq Z$

代表的な半順序 (3)

代表的な半順序 (3)：整数の整除関係

1 以上の整数全体の集合 $\mathbb{Z}_+$ 上の関係 $|$ を，任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$a \mid b \text{ であることは } a \text{ が } b \text{ の約数であること}$$

として定義する

代表的な半順序 (3)

代表的な半順序 (3)：整数の整除関係

1 以上の整数全体の集合 $\mathbb{Z}_+$ 上の関係 $|$ を，任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$a \mid b$ であることは a が b の約数であること

として定義する

今からやること

この関係 $|$ が半順序であることを証明する

次の 3 つが成り立つことを確認すればよい

- 反射性
- 反対称性
- 推移性

代表的な半順序 (3) 続き

代表的な半順序 (3)：整数の整除関係

1 以上の整数全体の集合 $\mathbb{Z}_+$ 上の関係 $|$ を，任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$a \mid b \text{ であることは } a \text{ が } b \text{ の約数であること}$$

として定義する

反射性：確認

任意の $a \in \mathbb{Z}_+$ に対して，$a \mid a$

反対称性：次のページで確認

任意の $a, b \in \mathbb{Z}_+$ に対して，$a \mid b$ かつ $b \mid a$ ならば $a = b$

推移性：後のページで確認

任意の $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ に対して，$a \mid b$ かつ $b \mid c$ ならば $a \mid c$

代表的な半順序 (3)：反対称性の証明

- $a, b \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選ぶ.
- $a \mid b$ と $b \mid a$ を仮定する.

- $$a = b$$ $\square$

代表的な半順序 (3)：反対称性の証明

- $a, b \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選ぶ.
- $a \mid b$ と $b \mid a$ を仮定する.
- $a \mid b$ から，ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$b = ap$
- $$a = b$$ $\square$

代表的な半順序 (3)：反対称性の証明

- $a, b \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選ぶ.
- $a \mid b$ と $b \mid a$ を仮定する.
- $a \mid b$ から，ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$b = ap$
- $b \mid a$ から，ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$a = bq$
- $a = b$ $\square$

代表的な半順序 (3)：反対称性の証明

- $a, b \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選ぶ.
- $a \mid b$ と $b \mid a$ を仮定する.
- $a \mid b$ から，ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$b = ap$
- $b \mid a$ から，ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$a = bq$
- したがって，$b = ap = (bq)p = bqp$
- $a = b$ $\square$

代表的な半順序 (3)：反対称性の証明

- $a, b \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選ぶ.
- $a \mid b$ と $b \mid a$ を仮定する.
- $a \mid b$ から，ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$b = ap$
- $b \mid a$ から，ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$a = bq$
- したがって，$b = ap = (bq)p = bqp$
- $p, q \in \mathbb{Z}_+$ なので，$p = 1, q = 1$
- $$a = b$$ $\square$

代表的な半順序 (3)：反対称性の証明

- $a, b \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選ぶ.
- $a \mid b$ と $b \mid a$ を仮定する.
- $a \mid b$ から，ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$b = ap$
- $b \mid a$ から，ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$a = bq$
- したがって，$b = ap = (bq)p = bqp$
- $p, q \in \mathbb{Z}_+$ なので，$p = 1, q = 1$
- $a = bq$ なので，$a = b$ $\square$

代表的な半順序 (3)：推移性の証明

- $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選ぶ.
- $a \mid b$ と $b \mid c$ を仮定する.

- したがって，$a|c$. □

代表的な半順序 (3)：推移性の証明

- $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選ぶ.
- $a \mid b$ と $b \mid c$ を仮定する.
- $a \mid b$ から，ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$b = ap$ . . . . (1)
- $b \mid c$ から，ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$c = bq$ . . . . (2)
- したがって，ある $r \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$c = ar$
- したがって，$a|c$. $\square$

「〜が存在する」という命題の証明法 (第 1 回講義より)

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く.
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

代表的な半順序 (3)：推移性の証明

- $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選ぶ.
- $a \mid b$ と $b \mid c$ を仮定する.
- $a \mid b$ から，ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$b = ap$ . . . . (1)
- $b \mid c$ から，ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$c = bq$ . . . . (2)
- $r = pq$ とする. . . . . (3)

- したがって，ある $r \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$c = ar$
- したがって，$a|c$. □

「∼が存在する」という命題の証明法 (第 1 回講義より)

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く.
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

代表的な半順序 (3)：推移性の証明

- $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選ぶ.
- $a \mid b$ と $b \mid c$ を仮定する.
- $a \mid b$ から，ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$b = ap$ ……(1)
- $b \mid c$ から，ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$c = bq$ ……(2)
- $r = pq$ とする. ……(3)
- $p, q \in \mathbb{Z}_+$ なので，$r = pq \in \mathbb{Z}_+$

- したがって，ある $r \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$c = ar$
- したがって，$a|c$. □

「〜が存在する」という命題の証明法 (第 1 回講義より)

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く.
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

代表的な半順序 (3)：推移性の証明

- $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選ぶ.
- $a \mid b$ と $b \mid c$ を仮定する.
- $a \mid b$ から，ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$b = ap$ .... (1)
- $b \mid c$ から，ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$c = bq$ .... (2)
- $r = pq$ とする. .... (3)
- $p, q \in \mathbb{Z}_+$ なので，$r = pq \in \mathbb{Z}_+$
- また，$c \overset{(2)}{=} bq$
- したがって，ある $r \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$c = ar$
- したがって，$a|c$. $\square$

「〜が存在する」という命題の証明法 (第 1 回講義より)

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く.
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

代表的な半順序 (3)：推移性の証明

- $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選ぶ．
- $a \mid b$ と $b \mid c$ を仮定する．
- $a \mid b$ から，ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$b = ap$ ....(1)
- $b \mid c$ から，ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$c = bq$ ....(2)
- $r = pq$ とする． ....(3)
- $p, q \in \mathbb{Z}_+$ なので，$r = pq \in \mathbb{Z}_+$
- また，$c \overset{(2)}{=} bq \overset{(1)}{=} (ap)q$
- したがって，ある $r \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$c = ar$
- したがって，$a|c$． $\square$

「〜が存在する」という命題の証明法 (第 1 回講義より)

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ，「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)．

代表的な半順序 (3)：推移性の証明

- $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選ぶ．
- $a \mid b$ と $b \mid c$ を仮定する．
- $a \mid b$ から，ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$b = ap$ ……(1)
- $b \mid c$ から，ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$c = bq$ ……(2)
- $r = pq$ とする． ……(3)
- $p, q \in \mathbb{Z}_+$ なので，$r = pq \in \mathbb{Z}_+$
- また，$c \overset{(2)}{=} bq \overset{(1)}{=} (ap)q = a(pq)$
- したがって，ある $r \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$c = ar$
- したがって，$a|c$． □

「〜が存在する」という命題の証明法 (第 1 回講義より)

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)．

代表的な半順序 (3)：推移性の証明

- $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ を任意に選ぶ.
- $a \mid b$ と $b \mid c$ を仮定する.
- $a \mid b$ から，ある $p \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$b = ap$ ....(1)
- $b \mid c$ から，ある $q \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$c = bq$ ....(2)
- $r = pq$ とする. ....(3)
- $p, q \in \mathbb{Z}_+$ なので，$r = pq \in \mathbb{Z}_+$
- また，$c \overset{(2)}{=} bq \overset{(1)}{=} (ap)q = a(pq) \overset{(3)}{=} ar$.
- したがって，ある $r \in \mathbb{Z}_+$ が存在して，$c = ar$
- したがって，$a|c$. $\square$

「〜が存在する」という命題の証明法 (第 1 回講義より)

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く.
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

全順序

集合 A と A 上の関係 R

全順序とは？

R が全順序であるとは，次を満たすこと

- R は反射性を持つ
- R は反対称性を持つ
- R は推移性を持つ
- R は完全性を持つ

例 1〜6 の中に，全順序はない

- 注：単に「順序」と言ったら，普通は「半順序」のことを指す
- 注：全順序のことを線形順序と呼ぶこともある

代表的な全順序

代表的な全順序：実数の大小関係

$\mathbb{R}$ 上の関係 $\leq$ を，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$x \leq y \text{ であることは } x \text{ が } y \text{ 以下であること}$$

として定義する

代表的な全順序

代表的な全順序：実数の大小関係

$\mathbb{R}$ 上の関係 $\leq$ を，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$x \leq y \text{ であることは } x \text{ が } y \text{ 以下であること}$$

として定義する

今からやること

この関係 $\leq$ が全順序であることを証明する

次の 4 つが成り立つことを確認すればよい

- 反射性，反対称性，推移性，完全性

反射性，反対称性，推移性は既に確認した

完全性：確認

任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，$x \leq y$ か $y \leq x$

同値関係

集合 A と A 上の関係 R

同値関係とは？

R が同値関係であるとは，次を満たすこと

- R は反射性を持つ
- R は対称性を持つ
- R は推移性を持つ

例 1〜6 の中で，同値関係は例 5，6

代表的な同値関係 (1)

代表的な同値関係 (1)：実数の相等関係

$\mathbb{R}$ 上の関係 $=$ を，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$x = y \text{ であることは } x \text{ が } y \text{ と等しいこと}$$

として定義する

代表的な同値関係 (1)

代表的な同値関係 (1)：実数の相等関係

$\mathbb{R}$ 上の関係 $=$ を，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$x = y \text{ であることは } x \text{ が } y \text{ と等しいこと}$$

として定義する

今からやること

この関係 $=$ が同値関係であることを証明する

次の 3 つが成り立つことを確認すればよい

- 反射性
- 対称性
- 推移性

代表的な同値関係 (1) 続き

代表的な同値関係 (1)：実数の相等関係

$\mathbb{R}$ 上の関係 $=$ を，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$x = y \text{ であることは } x \text{ が } y \text{ と等しいこと}$$

として定義する

反射性：確認

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$x = x$

対称性：確認

任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，$x = y$ ならば $y = x$

推移性：確認

任意の $x, y, z \in \mathbb{R}$ に対して，$x = y$ かつ $y = z$ ならば $x = z$

代表的な同値関係 (2)

代表的な同値関係 (2)：整数の合同関係

1 以上の任意の整数 p に対して，
0 以上の整数全体の集合 $\mathbb{N}$ 上の関係 $\equiv_p$ を，任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$m \equiv_p n \text{ であることは } m \equiv n \pmod{p} \text{ が成り立つこと}$$

として定義する

代表的な同値関係 (2)

代表的な同値関係 (2)：整数の合同関係

1 以上の任意の整数 p に対して，
0 以上の整数全体の集合 $\mathbb{N}$ 上の関係 $\equiv_p$ を，任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$m \equiv_p n \text{ であることは } m \equiv n \pmod{p} \text{ が成り立つこと}$$

として定義する

今からやること

この関係 $\equiv_p$ が同値関係であることを証明する

次の 3 つが成り立つことを確認すればよい

- 反射性
- 対称性
- 推移性

代表的な同値関係 (2) 続き

代表的な同値関係 (2)：整数の合同関係

1 以上の任意の整数 p に対して，
0 以上の整数全体の集合 $\mathbb{N}$ 上の関係 $\equiv_p$ を，任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$m \equiv_p n \text{ であることは } m \equiv n \pmod{p} \text{ が成り立つこと}$$

として定義する

反射性：次のページで確認

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$n \equiv_p n$

対称性：後のページで確認

任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$m \equiv_p n$ ならば $n \equiv_p m$

推移性：後のページで確認

任意の $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$\ell \equiv_p m$ かつ $m \equiv_p n$ ならば $\ell \equiv_p n$

代表的な同値関係 (2)：反射性の証明

- 任意に $n \in \mathbb{N}$ を選ぶ.
- このとき，整数 0 を考えると，$n - n = 0 = p \cdot 0$.
- したがって，$n \equiv n \pmod{p}$. $\square$

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$

「〜が存在する」という命題の証明法 (第 1 回講義より)

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く.
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

代表的な同値関係 (2)：対称性の証明

- 任意に $m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- したがって，$n \equiv m \pmod{p}$ □

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$

「〜が存在する」という命題の証明法 (第 1 回講義より)

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く.
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

代表的な同値関係 (2)：対称性の証明

- 任意に $m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- このとき，ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$

- したがって，$n \equiv m \pmod{p}$ □

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$

「〜が存在する」という命題の証明法 (第 1 回講義より)

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く.
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

代表的な同値関係 (2)：対称性の証明

- 任意に $m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- このとき，ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$
- 整数 $-q \in \mathbb{Z}$ を考えると，$n - m = p \cdot (-q)$
- したがって，$n \equiv m \pmod{p}$ $\square$

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$

「〜が存在する」という命題の証明法 (第 1 回講義より)

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く.
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

代表的な同値関係 (2)：推移性の証明

- 任意に $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- $\ell \equiv m \pmod{p}$ および $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する

- したがって，ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\ell - n = pq$ となる．
- したがって，$\ell \equiv n \pmod{p}$ $\square$

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$

代表的な同値関係 (2)：推移性の証明

- 任意に $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- $\ell \equiv m \pmod{p}$ および $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- $\ell \equiv m \pmod{p}$ から，ある $q_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\ell - m = pq_1$ ....(1)

- したがって，ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\ell - n = pq$ となる．
- したがって，$\ell \equiv n \pmod{p}$ □

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$

代表的な同値関係 (2)：推移性の証明

- 任意に $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- $\ell \equiv m \pmod{p}$ および $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- $\ell \equiv m \pmod{p}$ から，ある $q_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\ell - m = pq_1$ ....(1)
- $m \equiv n \pmod{p}$ から，ある $q_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq_2$ ...(2)

- したがって，ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\ell - n = pq$ となる．
- したがって，$\ell \equiv n \pmod{p}$ $\square$

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$

代表的な同値関係 (2)：推移性の証明

- 任意に $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- $\ell \equiv m \pmod{p}$ および $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- $\ell \equiv m \pmod{p}$ から，ある $q_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\ell - m = pq_1$ ....(1)
- $m \equiv n \pmod{p}$ から，ある $q_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq_2$ ...(2)
- $q = q_1 + q_2$ とする．

- したがって，ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\ell - n = pq$ となる．
- したがって，$\ell \equiv n \pmod{p}$ $\square$

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$

代表的な同値関係 (2)：推移性の証明

- 任意に $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- $\ell \equiv m \pmod{p}$ および $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- $\ell \equiv m \pmod{p}$ から，ある $q_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\ell - m = pq_1$ ....(1)
- $m \equiv n \pmod{p}$ から，ある $q_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq_2$ ...(2)
- $q = q_1 + q_2$ とする．
- このとき，$q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ より，$q_1 + q_2 \in \mathbb{Z}$．

- したがって，ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\ell - n = pq$ となる．
- したがって，$\ell \equiv n \pmod{p}$ □

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$

代表的な同値関係 (2)：推移性の証明

- 任意に $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- $\ell \equiv m \pmod{p}$ および $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- $\ell \equiv m \pmod{p}$ から，ある $q_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\ell - m = pq_1$ ....(1)
- $m \equiv n \pmod{p}$ から，ある $q_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq_2$ ...(2)
- $q = q_1 + q_2$ とする．
- このとき，$q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ より，$q_1 + q_2 \in \mathbb{Z}$．
- また，$\ell - n = (\ell - m) + (m - n)$
- したがって，ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\ell - n = pq$ となる．
- したがって，$\ell \equiv n \pmod{p}$ □

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$

代表的な同値関係 (2)：推移性の証明

- 任意に $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- $\ell \equiv m \pmod{p}$ および $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- $\ell \equiv m \pmod{p}$ から，ある $q_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\ell - m = pq_1 \quad \ldots\ldots(1)$
- $m \equiv n \pmod{p}$ から，ある $q_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq_2 \quad \ldots(2)$
- $q = q_1 + q_2$ とする．
- このとき，$q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ より，$q_1 + q_2 \in \mathbb{Z}$.
- また，$\ell - n = (\ell - m) + (m - n) \overset{(1),\,(2)}{=} pq_1 + pq_2$
- したがって，ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\ell - n = pq$ となる．
- したがって，$\ell \equiv n \pmod{p}$ $\square$

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$

代表的な同値関係 (2)：推移性の証明

- 任意に $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- $\ell \equiv m \pmod{p}$ および $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- $\ell \equiv m \pmod{p}$ から，ある $q_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\ell - m = pq_1$ ....(1)
- $m \equiv n \pmod{p}$ から，ある $q_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq_2$ ...(2)
- $q = q_1 + q_2$ とする．
- このとき，$q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ より，$q_1 + q_2 \in \mathbb{Z}$．
- また，$\ell - n = (\ell - m) + (m - n) \overset{(1),\,(2)}{=} pq_1 + pq_2 = p(q_1 + q_2)$
- したがって，ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\ell - n = pq$ となる．
- したがって，$\ell \equiv n \pmod{p}$ $\square$

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$

代表的な同値関係 (2)：推移性の証明

- 任意に $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ を選ぶ
- $\ell \equiv m \pmod{p}$ および $m \equiv n \pmod{p}$ と仮定する
- $\ell \equiv m \pmod{p}$ から，ある $q_1 \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\ell - m = pq_1 \quad \ldots . (1)$
- $m \equiv n \pmod{p}$ から，ある $q_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq_2 \quad \ldots (2)$
- $q = q_1 + q_2$ とする．
- このとき，$q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ より，$q_1 + q_2 \in \mathbb{Z}$.
- また，$\ell - n = (\ell - m) + (m - n) \overset{(1),(2)}{=} pq_1 + pq_2 = p(q_1 + q_2) \overset{(3)}{=} pq$.
- したがって，ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\ell - n = pq$ となる．
- したがって，$\ell \equiv n \pmod{p}$ $\square$

$m \equiv n \pmod{p}$ の定義 (再掲)

ある $q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m - n = pq$

目次

今日のまとめ

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

関係とそれにまつわる概念

- 関係を理解する
- 関係の性質を理解する
  - 反射性，完全性，対称性，反対称性，推移性
- 特殊な関係を理解する
  - 順序 (半順序)，全順序，同値関係

- 登場した「関係」は「2 つのものの間の関係」だけだった
- 3 つのものの間の関係は？
- それ以上のものの間の関係は？

n 項関係とは？

n 項関係とは？（常識に基づく定義）

A 上の n 項関係は次のように定められるもの

- 関係を表す関数「$A^n \to \{ ○, × \}$」がある
- 任意の $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ に対して
  その関数の値が「○」か「×」のどちらかに決まる

この一般化の下で，講義で扱った「関係」は「二項関係」と呼ばれる．

目次

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次