離散数学 第 8 回
関数 (2)：全射と単射

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 6 月 17 日

最終更新：2014 年 6 月 16 日　10:56

スケジュール 前半

1. 証明法 (1) :「〜が存在する」ことの証明 (4 月 8 日)
2. 証明法 (2) :「任意の〜に対して…である」ことの証明 (4 月 15 日)
3. 証明法 (3) :「〜ならば…である」ことの証明 (4 月 22 日)

- ⋆ 休み (祝日) (4 月 29 日)
- ⋆ 休み (振替休日) (5 月 6 日)

4. 集合の記法 (1) : 外延的記法と内包的記法 (5 月 13 日)
5. 集合の記法 (2) : 直積と冪集合 (5 月 20 日)
6. 証明法 (4) : 集合に関する証明 (5 月 27 日)
7. 関数 (1) : 像と逆像 (6 月 3 日)

- 中間試験 (6 月 10 日)

スケジュール 後半 (予定)

8. 関数 (2)：全射と単射 (6 月 17 日)
- ⋆ 休講 (海外出張) (6 月 24 日)
- ⋆ 休講 (海外出張) (7 月 1 日)
9. 関係 (1)：関係 (7 月 8 日)
10. 関係 (2)：同値関係 (7 月 15 日)
11. 関係 (3)：順序関係 (7 月 22 日)
12. 証明法 (5)：数学的帰納法 (7 月 29 日)
13. 集合の記法 (3)：集合の再帰的定義 (8 月 5 日)
- 期末試験 (8 月 12 日？)

注意：予定の変更もありうる

今日の概要

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 特殊な関数「全射」,「単射」,「全単射」を理解して，その性質と違いを論述できるようになる
- 全単射の逆関数を理解し，構成できるようになる

目次

マンツーマンディフェンス

全単射の例

新幹線の指定席

単射の例

目次

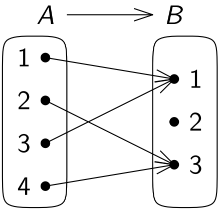
全射

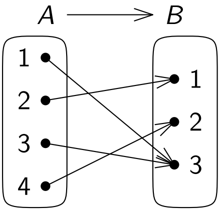
集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全射とは？

f が全射であるとは，次を満たすこと

$$\text{任意の } b \in B \text{ に対して，ある } a \in A \text{ が存在して } b = f(a)$$





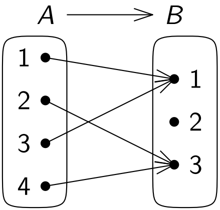
全射

集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

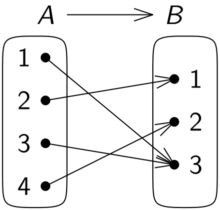
全射とは？

f が**全射**であるとは，次を満たすこと

$$\text{任意の } b \in B \text{ に対して，ある } a \in A \text{ が存在して } b = f(a)$$



全射ではない



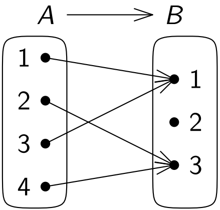
全射

集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

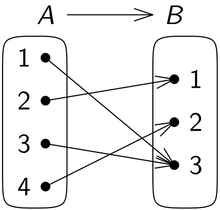
全射とは？

f が全射であるとは，次を満たすこと

$$\text{任意の } b \in B \text{ に対して，ある } a \in A \text{ が存在して } b = f(a)$$



全射ではない



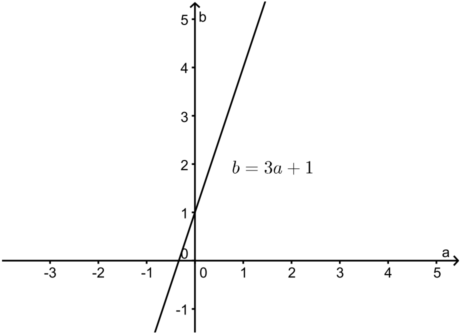
全射である

例題 1

例題 1

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$



例題 1：続き

例題 1

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

格言 (第 1 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

例題 1：続き

例題 1

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

$$任意の\ a \in \mathbb{R}\ に対して\ f(a) = 3a + 1$$

格言 (第 1 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

全射の定義に立ち戻って書き直す

任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$

例題 1：続き

例題 1

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

格言 (第 1 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

全射の定義に立ち戻って書き直す

任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$

「任意の～に対して…である」という命題の証明法 (第 2 回講義より)

1. 「任意の～を考える」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

例題 1：証明

例題 1

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

証明：任意の $b \in \mathbb{R}$ を考える．

- (ここで,「ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$」となることを証明する)
- したがって，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$
- したがって，f は全射である． $\square$

例題 1：証明

例題 1

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

$$任意の\ a \in \mathbb{R}\ に対して\ f(a) = 3a + 1$$

証明：任意の $b \in \mathbb{R}$ を考える．

- (ここで,「ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$」となることを証明する)
- したがって，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$
- したがって，f は全射である． □

「〜が存在する」という命題の証明法

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)．

例題 1：証明

例題 1

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

証明：任意の $b \in \mathbb{R}$ を考える．

- $a = \frac{b-1}{3}$ とする．

- したがって，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$
- したがって，f は全射である． $\square$

例題 1：証明

例題 1

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

証明：任意の $b \in \mathbb{R}$ を考える．

- $a = \frac{b-1}{3}$ とする．
- $b \in \mathbb{R}$ なので，$a \in \mathbb{R}$ である．
- したがって，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$
- したがって，f は全射である． □

例題 1：証明

例題 1

次の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

証明：任意の $b \in \mathbb{R}$ を考える．

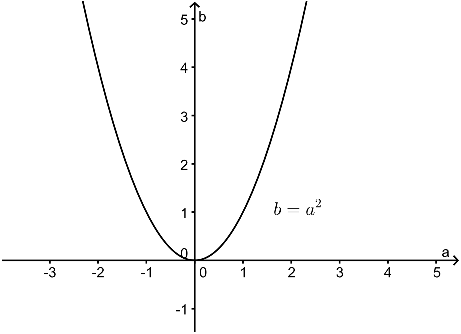
- $a = \frac{b-1}{3}$ とする．
- $b \in \mathbb{R}$ なので，$a \in \mathbb{R}$ である．
- また，$3a + 1 = 3 \cdot \frac{b-1}{3} + 1 = b$ となる．
- したがって，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$
- したがって，f は全射である． $\square$

例題 2

例題 2

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ.

$$任意の\ a \in \mathbb{R}\ に対して\ f(a) = a^2$$



例題 2：続き

例題 2

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = a^2$」ではない

例題 2：続き

例題 2

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = a^2$」ではない

整理する

ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$b \neq a^2$

例題 2：続き

例題 2

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = a^2$」ではない

整理する

ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$b \neq a^2$

「〜が存在する」という命題の証明法

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)．

例題 2：証明

例題 2

次の関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

証明：$-1 \in \mathbb{R}$ を考える．

- (ここで,「任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$-1 \neq a^2$」を証明する．)
- したがって，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$-1 \neq a^2$.
- したがって，f は全射でない． □

例題 2：証明

例題 2

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

証明：$-1 \in \mathbb{R}$ を考える．

- (ここで,「任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$-1 \neq a^2$」を証明する．)
- したがって，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$-1 \neq a^2$.
- したがって，f は全射でない． □

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法 (第 2 回講義より)

1. 「任意の〜を考える」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

例題 2：証明

例題 2

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

証明：$-1 \in \mathbb{R}$ を考える．

- 任意の $a \in \mathbb{R}$ を考える．
- このとき，$a^2 \geq 0$ なので，$-1 \neq a^2$．
- したがって，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$-1 \neq a^2$．
- したがって，f は全射でない． $\square$

補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと全射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は全射か？

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(a) = a^2$
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f_2(a) = a^2$
- $f_3 \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f_3(a) = a^2$
- $f_4 \colon [0, 1] \to [0, \infty)$, $f_4(a) = a^2$

格言 (再掲)

関数の始域と終域を常に意識 (似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと全射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は全射か？

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(a) = a^2$ 全射ではない
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f_2(a) = a^2$
- $f_3 \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f_3(a) = a^2$
- $f_4 \colon [0, 1] \to [0, \infty)$, $f_4(a) = a^2$

格言 (再掲)

関数の始域と終域を常に意識 (似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと全射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は全射か？

- $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,　$f_1(a) = a^2$　全射ではない
- $f_2\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$,　$f_2(a) = a^2$　全射である
- $f_3\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$,　$f_3(a) = a^2$
- $f_4\colon [0,1] \to [0,\infty)$,　$f_4(a) = a^2$

格言 (再掲)

関数の始域と終域を常に意識　(似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと全射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は全射か？

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,　$f_1(a) = a^2$　全射ではない
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$,　$f_2(a) = a^2$　全射である
- $f_3 \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$,　$f_3(a) = a^2$　全射である
- $f_4 \colon [0, 1] \to [0, \infty)$,　$f_4(a) = a^2$

格言 (再掲)

関数の始域と終域を常に意識　(似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと全射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は全射か？

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(a) = a^2$ 全射ではない
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f_2(a) = a^2$ 全射である
- $f_3 \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f_3(a) = a^2$ 全射である
- $f_4 \colon [0, 1] \to [0, \infty)$, $f_4(a) = a^2$ 全射ではない

格言 (再掲)

関数の始域と終域を常に意識 (似たものに「行列のサイズ」がある)

目次

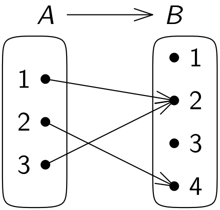
単射

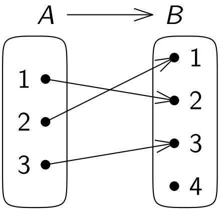
集合 A, B と関数 $f \colon A \to B$

単射とは？

f が**単射**であるとは，次を満たすこと

$$\text{任意の } a, a' \in A \text{ に対して，} \quad f(a) = f(a') \text{ ならば } a = a'$$





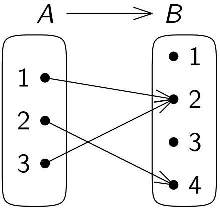
単射

集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

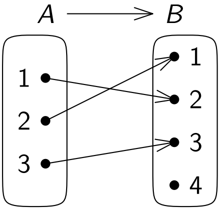
単射とは？

f が単射であるとは，次を満たすこと

$$\text{任意の } a, a' \in A \text{ に対して，} \quad f(a) = f(a') \text{ ならば } a = a'$$



単射ではない



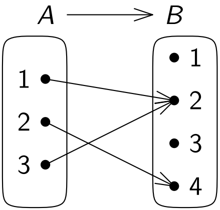
単射

集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

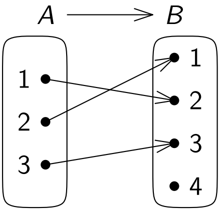
単射とは？

f が**単射**であるとは，次を満たすこと

$$\text{任意の } a, a' \in A \text{ に対して，} \quad f(a) = f(a') \text{ ならば } a = a'$$



単射ではない



単射である

例題 3

例題 3

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射であることを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

例題 3

例題 3

次の関数 $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射であることを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

定義に立ち戻って書き直す

任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$3a + 1 = 3a' + 1$ ならば $a = a'$

例題 3：証明

例題 3

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射であることを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

証明：任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ を考える．

- $3a + 1 = 3a' + 1$ であると仮定する．
- このとき，$a = a'$ である．
- したがって，f は単射である． □

例題 4

例題 4

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射でないことを証明せよ.

$$任意の\ a \in \mathbb{R}\ に対して\ f(a) = a^2$$

例題 4

例題 4

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射でないことを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$a^2 = a'^2$ ならば $a = a'$」ではない

例題 4

例題 4

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射でないことを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$a^2 = a'^2$ ならば $a = a'$」ではない

整理する

ある $a, a' \in \mathbb{R}$ が存在して「$a^2 = a'^2$ ならば $a = a'$」ではない

つまり，$a^2 = a'^2$ だが $a \neq a'$ となる $a, a' \in \mathbb{R}$ を見つければよい

例題 4

例題 4

次の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射でないことを証明せよ.

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

証明：$a = 2 \in \mathbb{R}$ と $a' = -2 \in \mathbb{R}$ を考える.

- このとき，$a^2 = 4 = a'^2$ であるが，$a \neq a'$ である.
- したがって，f は単射でない. □

補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと単射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は単射か？

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,　　$f_1(a) = a^2$
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$,　　$f_2(a) = a^2$
- $f_3 \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$,　　$f_3(a) = a^2$
- $f_4 \colon [0, 1] \to [0, \infty)$,　　$f_4(a) = a^2$

格言 (再々掲)

関数の始域と終域を常に意識　　(似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと単射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は単射か？

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_1(a) = a^2$ 　単射ではない
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $\quad f_2(a) = a^2$
- $f_3 \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\quad f_3(a) = a^2$
- $f_4 \colon [0, 1] \to [0, \infty)$, $\quad f_4(a) = a^2$

格言 (再々掲)

関数の始域と終域を常に意識　(似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと単射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は単射か？

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(a) = a^2$ 単射ではない
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f_2(a) = a^2$ 単射ではない
- $f_3 \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f_3(a) = a^2$
- $f_4 \colon [0, 1] \to [0, \infty)$, $f_4(a) = a^2$

格言 (再々掲)

関数の始域と終域を常に意識 (似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと単射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は単射か？

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(a) = a^2$ 単射ではない
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f_2(a) = a^2$ 単射ではない
- $f_3 \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f_3(a) = a^2$ 単射である
- $f_4 \colon [0, 1] \to [0, \infty)$, $f_4(a) = a^2$

格言 (再々掲)

関数の始域と終域を常に意識 (似たものに「行列のサイズ」がある)

補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと単射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は単射か？

- $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,　$f_1(a) = a^2$　単射ではない
- $f_2\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$,　$f_2(a) = a^2$　単射ではない
- $f_3\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$,　$f_3(a) = a^2$　単射である
- $f_4\colon [0, 1] \to [0, \infty)$,　$f_4(a) = a^2$　単射である

格言 (再々掲)

関数の始域と終域を常に意識　(似たものに「行列のサイズ」がある)

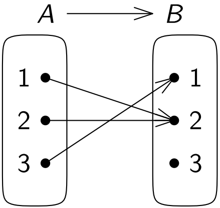
目次

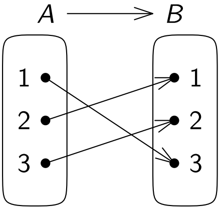
全単射

集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全単射とは？

f が全単射であるとは，全射であり，かつ，単射であること



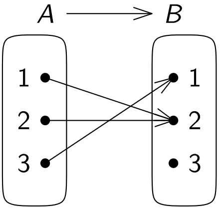


全単射

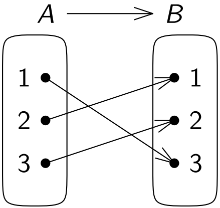
集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全単射とは？

f が**全単射**であるとは，全射であり，かつ，単射であること



全単射ではない

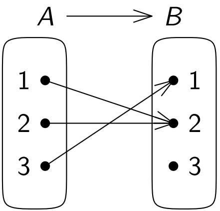


全単射

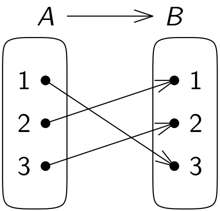
集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全単射とは？

f が全単射であるとは，全射であり，かつ，単射であること



全単射ではない



全単射である

逆関数

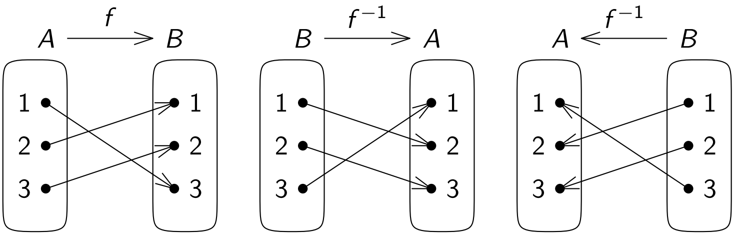
集合 A, B と全単射 $f\colon A \to B$

逆関数とは？

f の逆関数とは $f^{-1}\colon B \to A$ で,

$$\text{任意の } a \in A,\ b \in B \text{ に対して } a = f^{-1}(b) \text{ と } b = f(a) \text{ が同値}$$

となるもののことである



例題 5

例題 5

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

は全単射であるが (例題 1，3)，その逆関数 $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$\text{任意の } b \in \mathbb{R} \text{ に対して } f^{-1}(b) = \frac{b-1}{3}$$

で与えられることを証明せよ．

<u>証明</u>：同値変形により証明する．任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，

$\square$

例題 5

例題 5

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

は全単射であるが (例題 1，3)，その逆関数 $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$\text{任意の } b \in \mathbb{R} \text{ に対して } f^{-1}(b) = \frac{b-1}{3}$$

で与えられることを証明せよ．

証明：同値変形により証明する．任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，

$$b = f(a)$$

□

例題 5

例題 5

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

は全単射であるが (例題 1，3)，その逆関数 $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$\text{任意の } b \in \mathbb{R} \text{ に対して } f^{-1}(b) = \frac{b-1}{3}$$

で与えられることを証明せよ．

証明：同値変形により証明する．任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，

$$b = f(a) \Leftrightarrow b = 3a + 1$$

□

例題 5

例題 5

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

は全単射であるが (例題 1，3)，その逆関数 $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$\text{任意の } b \in \mathbb{R} \text{ に対して } f^{-1}(b) = \frac{b-1}{3}$$

で与えられることを証明せよ．

<u>証明</u>：同値変形により証明する．任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，

$$b = f(a) \Leftrightarrow b = 3a + 1 \Leftrightarrow a = \frac{b-1}{3}$$

□

例題 5

例題 5

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

は全単射であるが (例題 1，3)，その逆関数 $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$\text{任意の } b \in \mathbb{R} \text{ に対して } f^{-1}(b) = \frac{b-1}{3}$$

で与えられることを証明せよ．

証明：同値変形により証明する．任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，

$$b = f(a) \Leftrightarrow b = 3a + 1 \Leftrightarrow a = \frac{b-1}{3}$$

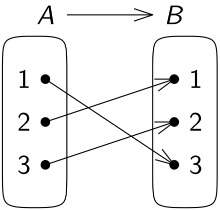
したがって，$f^{-1}(b) = \frac{b-1}{3}$. $\square$

逆関数と逆像：注意

注意

関数 $f \colon A \to B$

- $Y \subseteq B$ のとき，$f^{-1}(Y)$ は Y の逆像
  - f が全単射であろうがなかろうが定義される
- $b \in B$ のとき，$f^{-1}(b)$ は f の逆関数 f^{-1} の b における値
  - f が全単射であるときのみ定義される



- $f^{-1}(\{1,2\}) = \{2,3\}$
- $f^{-1}(\{2\}) = \{3\}$
- $f^{-1}(2) = 3$

もう一つ注意

全単射の逆関数も全単射 (演習問題)

目次

今日のまとめ

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 特殊な関数「全射」,「単射」,「全単射」を理解して，その性質と違いを論述できるようになる
- 全単射の逆関数を理解し，構成できるようになる

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次