

離散数学 第 2 回
証明法 (2) : 「任意の～に対して…である」ことの証明

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 4 月 15 日

最終更新 : 2014 年 4 月 16 日 11:30

スケジュール 前半 (予定)

- | | | |
|---|--|------------|
| 1 | 証明法 (1) : 「 $\sim$ が存在する」ことの証明 | (4 月 8 日) |
| 2 | 証明法 (2) : 「任意の $\sim$ に対して $\dots$ である」ことの証明 | (4 月 15 日) |
| 3 | 証明法 (3) : 「 $\sim$ ならば $\dots$ である」ことの証明 | (4 月 22 日) |
| ★ | 休み (祝日) | (4 月 29 日) |
| ★ | 休み (振替休日) | (5 月 6 日) |
| 4 | 集合の記法 (1) : 外延的記法と内包的記法 | (5 月 13 日) |
| 5 | 集合の記法 (2) : 直積と冪集合 | (5 月 20 日) |
| 6 | 証明法 (4) : 集合に関する証明 | (5 月 27 日) |
| 7 | 関数 (1) : 像と逆像 | (6 月 3 日) |
| ● | 中間試験 | (6 月 10 日) |

注意 : 予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- | | | |
|----|----------------------|-------------|
| 8 | 関数 (2) : 全射と単射 | (6 月 17 日) |
| ★ | 休講 (海外出張) | (6 月 24 日) |
| ★ | 休講 (海外出張) | (7 月 1 日) |
| 9 | 関係 (1) : 関係 | (7 月 8 日) |
| 10 | 関係 (2) : 同値関係 | (7 月 15 日) |
| 11 | 関係 (3) : 順序関係 | (7 月 22 日) |
| 12 | 証明法 (5) : 数学的帰納法 | (7 月 29 日) |
| 13 | 集合の記法 (3) : 集合の再帰的定義 | (8 月 5 日) |
| ● | 期末試験 | (8 月 12 日?) |

注意 : 予定の変更もありうる

今日の目標

- ▶ 命題の否定が作れるようになる (前回の復習を兼ねて)
- ▶ 「任意の $\sim$ に対して $\dots$ である」という命題の証明ができるようになる
- ▶ 反例による証明ができるようになる
- ▶ 「任意の $\sim$ に対して」, 「ある $\sim$ が存在して」が連なる命題の証明ができるようになる

目次

- ① 命題の否定
- ② 「任意の $\sim$ に対して $\cdots$ である」という命題の証明法
- ③ 「任意の $\sim$ に対して $\cdots$ である」という命題の否定の証明法
- ④ より複雑な命題の証明
- ⑤ 今日のまとめ

「任意の～に対して…である」という命題の例

県名	面積 (km ²)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.81	785,873	徳島市
香川県	1,876.58	995,779	高松市
愛媛県	5,678.51	1,430,957	松山市
高知県	7,105.20	764,596	高知市

- ▶ 任意の四国の県に対して、その面積は $1,000\text{km}^2$ 以上である
- ▶ 任意の四国の県に対して、その人口は 100 万人以上である

「任意の～に対して…である」の表現法

- ▶ 任意の四国の県に対して、その人口は 100 万人以上である
- ▶ どの四国の県に対しても、その人口は 100 万人以上である
- ▶ すべての四国の県に対して、その人口は 100 万人以上である
- ▶ 任意の四国の県の人口は 100 万人以上である
- ▶ どの四国の県の人口も 100 万人以上である
- ▶ すべての四国の県の人口は 100 万人以上である
- ▶ $\forall$ 四国の県 (その人口は 100 万人以上である)

この表現において鍵となる事項

「…である」に出てくる「その」のような指示語は
「任意の～に対して」に出てくる「～」を指す

「～が存在する」という命題の例

県名	面積 (km ²)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.81	785,873	徳島市
香川県	1,876.58	995,779	高松市
愛媛県	5,678.51	1,430,957	松山市
高知県	7,105.20	764,596	高知市

- ▶ 四国には、面積が 1,000km² 以上の県が存在する
- ▶ 四国には、人口が 100 万人以上の県が存在する

「～が存在する」の表現法

- ▶ 四国には、人口が 100 万人以上の県が存在する
- ▶ 四国のある県の人口は、100 万人以上である
- ▶ 四国のある県に対して、その人口は 100 万人以上である
- ▶ 四国にはある県が存在して、その人口は 100 万人以上である
- ▶ $\exists$ 四国の県 (その人口は 100 万人以上である)

「任意の～に対して…である」という命題の否定

次に挙げる命題の否定は何か？

どの四国の県の人口も 100 万人以上である

「任意の～に対して…である」という命題の否定の作り方

- 1 「任意の～に対して…である」という形に書き換える
- 2 「ある～に対して…ではない」という形に書き換える
- 3 日本語として自然になるように整える

「任意の～に対して…である」という命題の否定

次に挙げる命題の否定は何か？

どの四国の県の人口も 100 万人以上である

「任意の～に対して…である」という命題の否定の作り方

- 1 「任意の～に対して…である」という形に書き換える
- 2 「ある～に対して…ではない」という形に書き換える
- 3 日本語として自然になるように整える

「任意の～に対して…である」という命題の否定

次に挙げる命題の否定は何か？

どの四国の県の人口も 100 万人以上である

「任意の～に対して…である」という命題の否定の作り方

- 1 「任意の～に対して…である」という形に書き換える
任意の四国の県に対して、その人口は 100 万人以上である
- 2 「ある～に対して…ではない」という形に書き換える
- 3 日本語として自然になるように整える

「任意の～に対して…である」という命題の否定

次に挙げる命題の否定は何か？

どの四国の県の人口も 100 万人以上である

「任意の～に対して…である」という命題の否定の作り方

- 1 「任意の～に対して…である」という形に書き換える
任意の四国の県に対して、その人口は 100 万人以上である
- 2 「ある～に対して…ではない」という形に書き換える
ある四国の県に対して、その人口は 100 万人以上ではない
- 3 日本語として自然になるように整える

「任意の～に対して…である」という命題の否定

次に挙げる命題の否定は何か？

どの四国の県の人口も 100 万人以上である

「任意の～に対して…である」という命題の否定の作り方

- 1 「任意の～に対して…である」という形に書き換える
任意の四国の県に対して、その人口は 100 万人以上である
- 2 「ある～に対して…ではない」という形に書き換える
ある四国の県に対して、その人口は 100 万人以上ではない
- 3 日本語として自然になるように整える
ある四国の県の人口は 100 万人以上ではない

「～が存在する」という命題の否定

次に挙げる命題の否定は何か？

四国には、人口が 100 万人以上の県が存在する

「～が存在する」という命題の否定の作り方

- 1 「ある～に対して…である」という形に書き換える
- 2 「どの～に対しても…ではない」という形に書き換える
- 3 日本語として自然になるように整える

「～が存在する」という命題の否定

次に挙げる命題の否定は何か？

四国には、人口が 100 万人以上の県が存在する

「～が存在する」という命題の否定の作り方

- 1 「ある～に対して…である」という形に書き換える
- 2 「どの～に対しても…ではない」という形に書き換える
- 3 日本語として自然になるように整える

「～が存在する」という命題の否定

次に挙げる命題の否定は何か？

四国には、人口が 100 万人以上の県が存在する

「～が存在する」という命題の否定の作り方

- 1 「ある～に対して…である」という形に書き換える
ある四国の県に対して、その人口は 100 万人以上である
- 2 「どの～に対しても…ではない」という形に書き換える
- 3 日本語として自然になるように整える

「～が存在する」という命題の否定

次に挙げる命題の否定は何か？

四国には、人口が 100 万人以上の県が存在する

「～が存在する」という命題の否定の作り方

- 1 「ある～に対して…である」という形に書き換える
ある四国の県に対して、その人口は 100 万人以上である
- 2 「**どの～に対しても…ではない**」という形に書き換える
どの四国の県に対しても、その人口は 100 万人以上ではない
- 3 日本語として自然になるように整える

「～が存在する」という命題の否定

次に挙げる命題の否定は何か？

四国には、人口が 100 万人以上の県が存在する

「～が存在する」という命題の否定の作り方

- 1 「ある～に対して…である」という形に書き換える
ある四国の県に対して、その人口は 100 万人以上である
- 2 「**どの～に対しても…ではない**」という形に書き換える
どの四国の県に対しても、その人口は 100 万人以上ではない
- 3 日本語として自然になるように整える
どの四国の県の人口も 100 万人以上ではない

目次

- ① 命題の否定
- ② 「任意の～に対して…である」という命題の証明法
- ③ 「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法
- ④ より複雑な命題の証明
- ⑤ 今日のまとめ

命題の証明法

証明とは？

命題が正しいことを論理的に説明する文章

格言

証明は文章。読者に伝わるように書く

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である

「任意の～に対して…である」という命題の証明法

- 1 「任意の～を考える」で始め、「したがって、…である」で終わる
- 2 それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である

証明：任意の実数 x を考える

- ▶ (ここに「 $x^2 + 1 \geq 2x$ 」であることの証明を書く)
- ▶ したがって、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である.



「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である

証明：任意の実数 x を考える

- ▶ 左辺 - 右辺 $= x^2 + 1 - 2x$
- ▶ したがって、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である.



「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である

証明：任意の実数 x を考える

- ▶ 左辺 - 右辺 $= x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2$
- ▶ したがって、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である.



「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である

証明：任意の実数 x を考える

- ▶ 左辺 - 右辺 $= x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2 \geq 0$.
- ▶ したがって、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である.



「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である

「任意の～に対して…である」という命題の証明法

- 1 「任意の～を考える」で始め、「したがって、…である」で終わる
- 2 それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である

証明：任意の実数 x を考える。

- ▶ (ここに「 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である」ことの証明を書く)
- ▶ したがって、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である。 □

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である

証明：任意の実数 x を考える.

▶ $(1+x)^3 + (1-x)^3$

▶ したがって、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である.



「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である

証明：任意の実数 x を考える。

- ▶ $(1+x)^3 + (1-x)^3 = (1+3x+3x^2+x^3) + (1-3x+3x^2-x^3)$
- ▶ したがって、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である。 □

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である

証明：任意の実数 x を考える。

- ▶ $(1+x)^3 + (1-x)^3 = (1+3x+3x^2+x^3) + (1-3x+3x^2-x^3)$
 $= 6x^2 + 2.$
- ▶ したがって、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である. □

目次

- ① 命題の否定
- ② 「任意の～に対して…である」という命題の証明法
- ③ 「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法
- ④ より複雑な命題の証明
- ⑤ 今日のまとめ

「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 1

例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の異なる素数 a, b に対して， $a + b$ は 2 で割り切れる

「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 1

例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の異なる素数 a, b に対して， $a + b$ は 2 で割り切れる

正しい場合は

- ▶ 先ほどのように証明する

正しくない場合は

- ▶ その命題の否定を証明する (反例を挙げる)

「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 1

例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の異なる素数 a, b に対して， $a + b$ は 2 で割り切れる

正しい場合は

- ▶ 先ほどのように証明する

正しくない場合は

- ▶ その命題の否定を証明する (反例を挙げる)

上の命題の否定

ある異なる素数 a, b に対して， $a + b$ は 2 で割り切れない

反例： $a + b$ が 2 で割り切れないような，異なる素数 a, b

「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 1

例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の異なる素数 a, b に対して， $a + b$ は 2 で割り切れる

解答：これは正しくない．その理由は以下の通りである．

▶ (ここにこの命題の否定の証明を書く)

▶



「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 1

例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の異なる素数 a, b に対して， $a + b$ は 2 で割り切れる

解答：これは正しくない．その理由は以下の通りである．

▶ 異なる素数 $a = 2, b = 3$ を考える．

▶



「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 1

例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の異なる素数 a, b に対して， $a + b$ は 2 で割り切れる

解答：これは正しくない．その理由は以下の通りである．

- ▶ 異なる素数 $a = 2, b = 3$ を考える．
- ▶ このとき， $a + b = 2 + 3 = 5$ であり，これは 2 で割り切れない。 □

「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 2

例題 2：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の実数 x に対して， $x^2 > 0$ である

注意

正しいか正しくないかの見通しは，下書きに書く

「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 2

例題 2：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の実数 x に対して， $x^2 > 0$ である

上の命題の否定

ある実数 x に対して， $x^2 > 0$ ではない

反例： $x^2 > 0$ ではないような実数 x

注意

正しいか正しくないかの見通しは，下書きに書く

「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 2

例題 2：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の実数 x に対して， $x^2 > 0$ である

解答：これは正しくない．その理由は以下の通りである．

▶ (ここにこの命題の否定の証明を書く)

▶



「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 2

例題 2：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の実数 x に対して， $x^2 > 0$ である

解答：これは正しくない．その理由は以下の通りである．

▶ 実数 $x = 0$ を考える．

▶



「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 2

例題 2：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の実数 x に対して， $x^2 > 0$ である

解答：これは正しくない．その理由は以下の通りである．

- ▶ 実数 $x = 0$ を考える．
- ▶ このとき， $x^2 = 0$ であり， $x^2 > 0$ にはならない.



目次

- ① 命題の否定
- ② 「任意の $\sim$ に対して $\cdots$ である」という命題の証明法
- ③ 「任意の $\sim$ に対して $\cdots$ である」という命題の否定の証明法
- ④ より複雑な命題の証明
- ⑤ 今日のまとめ

より複雑な命題の証明：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して，ある実数 y が存在して， $x + y = 0$ となる

まず，この命題の意味を理解する

より複雑な命題の証明：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して、 $x + y = 0$ となる

まず、この命題の意味を理解する

格言

「 $\forall$ 」「 $\exists$ 」が連なるときは、ゲームだと思いと分かりやすい

- ▶ $\forall$ ：相手の手番 (任意の～に対して)
- ▶ $\exists$ ：自分の手番 (ある～が存在して)

手番を繰り返して、残った命題を成り立たせることが自分の目標

より複雑な命題の証明：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して、 $x + y = 0$ となる

まず、この命題の意味を理解する

格言

「 $\forall$ 」「 $\exists$ 」が連なるときは、ゲームだと思いと分かりやすい

- ▶ $\forall$ ：相手の手番 (任意の～に対して)
- ▶ $\exists$ ：自分の手番 (ある～が存在して)

手番を繰り返して、残った命題を成り立たせることが自分の目標

例題 1 に挙げた命題の解釈

相手がどんな実数 x を選んでも、自分がある実数 y を選んで、
自分は $x + y = 0$ にできる

より複雑な命題の証明：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して、 $x + y = 0$ となる

「任意の～に対して…である」という命題の証明法

- 1 「任意の～を考える」で始め、「したがって、…である」で終わる
- 2 それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

より複雑な命題の証明：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して，ある実数 y が存在して， $x + y = 0$ となる

証明：任意の x を考える．

- ▶ (ここに「ある実数 y が存在して， $x + y = 0$ となる」ことの証明を書く)
- ▶ したがって，ある実数 y が存在して $x + y = 0$ となる. □

より複雑な命題の証明：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して、 $x + y = 0$ となる

証明：任意の x を考える。

- ▶ (ここに「ある実数 y が存在して、 $x + y = 0$ となる」ことの証明を書く)
- ▶ したがって、ある実数 y が存在して $x + y = 0$ となる。 □

「～が存在する」という命題の証明法

- 1 存在する、といっているものを 1 つ見つけ、「それを考える」と書く。
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)。

より複雑な命題の証明：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して、 $x + y = 0$ となる

証明：任意の x を考える.

- ▶ このとき、 $y = -x$ を考える.
- ▶ したがって、ある実数 y が存在して $x + y = 0$ となる.



より複雑な命題の証明：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して、 $x + y = 0$ となる

証明：任意の x を考える。

- ▶ このとき、 $y = -x$ を考える。そうすると、 $x + y = x + (-x) = 0$ 。
- ▶ したがって、ある実数 y が存在して $x + y = 0$ となる。 □

より複雑な命題の証明：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して、 $xy = 0$ となる

まず、この命題の意味を理解する

より複雑な命題の証明：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して、 $xy = 0$ となる

まず、この命題の意味を理解する

格言 (再掲)

「 $\forall$ 」「 $\exists$ 」が連なるときは、ゲームだと思いと分かりやすい

- ▶ $\forall$ ：相手の手番 (任意の～に対して)
- ▶ $\exists$ ：自分の手番 (ある～が存在して)

手番を繰り返して、残った命題を成り立たせることが自分の目標

より複雑な命題の証明：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して、 $xy = 0$ となる

まず、この命題の意味を理解する

格言 (再掲)

「 $\forall$ 」「 $\exists$ 」が連なるときは、ゲームだと思いと分かりやすい

- ▶ $\forall$ ：相手の手番 (任意の～に対して)
- ▶ $\exists$ ：自分の手番 (ある～が存在して)

手番を繰り返して、残った命題を成り立たせることが自分の目標

例題 2 に挙げた命題の解釈

自分がある実数 x を選べば、相手がどんな実数 y を選んでも、
自分は $xy = 0$ にできる

より複雑な命題の証明：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して、 $xy = 0$ となる

証明：実数 $x = 0$ を考える.

- ▶ (ここに、「任意の実数 y に対して、 $xy = 0$ となる」ことの証明を書く)

▶



より複雑な命題の証明：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して、 $xy = 0$ となる

証明：実数 $x = 0$ を考える.

- ▶ 任意の実数 y を考える.
- ▶ (ここに「 $xy = 0$ となる」ことの証明を書く)
- ▶ したがって、 $xy = 0$ となる.



より複雑な命題の証明：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して、 $xy = 0$ となる

証明：実数 $x = 0$ を考える.

- ▶ 任意の実数 y を考える.
- ▶ このとき、 $x = 0$ なので、 $xy = 0$ となる.
- ▶ したがって、 $xy = 0$ となる.



より複雑な命題の証明：例題 3

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して， $x + y = 0$ となる

まず，この命題の意味を理解する

より複雑な命題の証明：例題 3

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して， $x + y = 0$ となる

まず，この命題の意味を理解する

格言 (再掲)

「 $\forall$ 」「 $\exists$ 」が連なるときは，ゲームだと思いと分かりやすい

- ▶ $\forall$ ：相手の手番 (任意の～に対して)
- ▶ $\exists$ ：自分の手番 (ある～が存在して)

手番を繰り返して，残った命題を成り立たせることが自分の目標

より複雑な命題の証明：例題 3

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して， $x + y = 0$ となる

まず，この命題の意味を理解する

格言 (再掲)

「 $\forall$ 」「 $\exists$ 」が連なるときは，ゲームだと思いと分かりやすい

- ▶ $\forall$ ：相手の手番 (任意の～に対して)
- ▶ $\exists$ ：自分の手番 (ある～が存在して)

手番を繰り返して，残った命題を成り立たせることが自分の目標

例題 3 に挙げた命題の解釈

自分がある実数 x を選べば，相手がどんな実数 y を選んでも，
自分は $x + y = 0$ にできる

より複雑な命題の証明：例題 3

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して， $x + y = 0$ となる

例題 3 に挙げた命題の否定

任意の実数 x に対して，ある実数 y が存在して， $x + y = 0$ とならない

より複雑な命題の証明：例題 3

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して， $x + y = 0$ となる

例題 3 に挙げた命題の否定

任意の実数 x に対して，ある実数 y が存在して， $x + y = 0$ とならない

例題 3 に挙げた命題の否定の解釈

相手がどんな実数 x を選んでも，自分がある実数 y を選べば，自分は $x + y = 0$ とならないようにできる ($x + y \neq 0$ にできる)

より複雑な命題の証明：例題 3

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して， $x + y = 0$ となる

解答：正しくない．その理由は以下の通りである．

例題 3 に挙げた命題の否定

任意の実数 x に対して，ある実数 y が存在して， $x + y = 0$ とならない

より複雑な命題の証明：例題 3

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して， $x + y = 0$ となる

解答：正しくない．その理由は以下の通りである．

▶ 任意の実数 x を考える．

▶ したがって，ある実数 y が存在して， $x + y = 0$ とはならない． □

例題 3 に挙げた命題の否定

任意の実数 x に対して，ある実数 y が存在して， $x + y = 0$ とならない

より複雑な命題の証明：例題 3

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して， $x + y = 0$ となる

解答：正しくない．その理由は以下の通りである．

- ▶ 任意の実数 x を考える．
- ▶ このとき，実数 $y = x^2 + x + 2$ を考える．
- ▶ そうすると，
$$x + y = x + (x^2 + x + 2) = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0.$$
- ▶ したがって，ある実数 y が存在して， $x + y = 0$ とはならない. □

例題 3 に挙げた命題の否定

任意の実数 x に対して，ある実数 y が存在して， $x + y = 0$ とならない

注意：例題 1 と例題 3 から分かること

例題 1

任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して、 $x + y = 0$ となる

これは正しい (真)

例題 3：次の命題は正しいか、正しくないか

ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して、 $x + y = 0$ となる

これは、正しくない (偽)

格言

命題の真偽は、 $\forall$ と $\exists$ の順序によって変わることがある

目次

- ① 命題の否定
- ② 「任意の $\sim$ に対して $\cdots$ である」という命題の証明法
- ③ 「任意の $\sim$ に対して $\cdots$ である」という命題の否定の証明法
- ④ より複雑な命題の証明
- ⑤ 今日のまとめ

今日のまとめ

この講義の目標：復習

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標：復習

- ▶ 命題の否定が作れるようになる (前回の復習を兼ねて)
- ▶ 「任意の $\sim$ に対して $\dots$ である」という命題の証明ができるようになる
- ▶ 反例による証明ができるようになる
- ▶ 「任意の $\sim$ に対して」, 「ある $\sim$ が存在して」が連なる命題の証明ができるようになる

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

目次

- ① 命題の否定
- ② 「任意の $\sim$ に対して $\cdots$ である」という命題の証明法
- ③ 「任意の $\sim$ に対して $\cdots$ である」という命題の否定の証明法
- ④ より複雑な命題の証明
- ⑤ 今日のまとめ