離散数学 第 12 回
証明法 (5)：数学的帰納法

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 7 月 29 日

最終更新：2014 年 7 月 28 日　11:38

今日の概要

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 数学的帰納法で証明ができるようになる
- 再帰的定義によって無限を扱う方法を理解する

目次

例題 1

例題 1：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ．

確認

- $n = 1$ のとき：$8^n - 3^n = 8 - 3 = 5$
- $n = 2$ のとき：$8^n - 3^n = 64 - 9 = 55 = 5 \times 11$
- $n = 3$ のとき：$8^n - 3^n = 512 - 27 = 485 = 5 \times 97$
- ...

注：これはただの確認であり，証明ではない

例題 1：数学的帰納法による証明

例題 1：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ．

<u>数学的帰納法による証明：方針</u>

1. $n = 1$ のときに正しいことを証明する
2. 任意の正の整数 $k \geq 1$ に対して，
   $n = k$ のときに正しいならば，$n = k + 1$ のときに正しいことを証明する

例題 1：数学的帰納法による証明 (1)

例題 1：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ．

<u>証明</u>：まず $n = 1$ のときに正しいことを証明する．

- $n = 1$ のとき，$8^n - 3^n = 8 - 3 = 5$.
- 5 は 5 で割り切れるので，このとき正しい．

例題 1：数学的帰納法による証明 (2)

例題 1：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ．

<u>証明 (続)</u>：次に，任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える．

- $8^k - 3^k$ が 5 で割り切れると仮定する．
  (注：帰納法の仮定と呼ばれる)
- 証明すべきことは，$8^{k+1} - 3^{k+1}$ が 5 で割り切れることである．
- 帰納法の仮定より，ある正の整数 m が存在して，$8^k - 3^k = 5m$ となる．
- $8^{k+1} - 3^{k+1} = (5 + 3) \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k = 5 \cdot 8^k + 3 \cdot (8^k - 3^k)$
- したがって，$8^{k+1} - 3^{k+1} = 5 \cdot 8^k + 3 \cdot 5m = 5 \cdot (8^k + 3m)$.
- $8^k + 3m$ は正の整数なので，$8^{k+1} - 3^{k+1}$ は 5 で割り切れる．　□

数学的帰納法とは？

数学的帰納法による証明法

「任意の正の整数 n に対して，$P(n)$」という形の命題の証明

1. $P(1)$ を証明　(基底段階)
2. 「任意の正の整数 k に対して『$P(k)$ ならば $P(k+1)$』」を証明　(帰納段階)

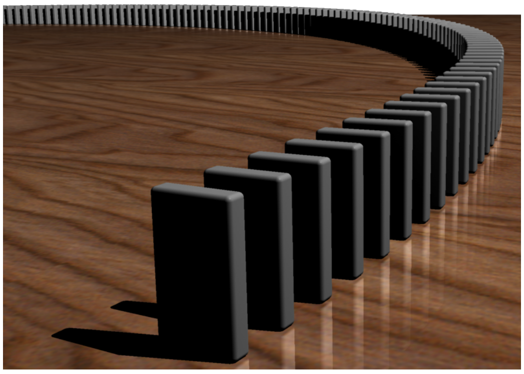
帰納段階での証明の書き方

1. 「任意の正の整数 k を考える」と書く
2. 「$P(k)$ であると仮定する」と書く
3. $P(k)$ を用いて，$P(k+1)$ が正しいことを導く (証明する)

例題 1 では，

$$P(n) = 8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

数学的帰納法のイメージ



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Dominoeffect.png

例題 2

例題 2：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ．

確認

- $n = 1$ のとき：$2n = 2 \leq 2 = 2^n$
- $n = 2$ のとき：$2n = 4 \leq 4 = 2^n$
- $n = 3$ のとき：$2n = 6 \leq 8 = 2^n$
- $n = 4$ のとき：$2n = 8 \leq 16 = 2^n$
- ...

注：これはただの確認であり，証明ではない

例題 2：数学的帰納法 (基底段階)

例題 2：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ．

<u>証明 (基底段階)</u>：まず，$n = 1$ のときに正しいことを証明する．

- 左辺 $= 2n = 2$.
- 右辺 $= 2^n = 2$.
- したがって，$2n \leq 2^n$ であり，正しい．

例題 2：数学的帰納法 (帰納段階)

例題 2：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ．

<u>証明 (帰納段階)</u>：次に，任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える．

- $2k \leq 2^k$ であると仮定する．
- <u>証明すべきことは，$2(k+1) \leq 2^{k+1}$ である．</u>
  (コツ：↑これをしっかりと書くとよい)
- $2(k+1) = 2k + 2$.
- 帰納法の仮定より，$2k + 2 \leq 2^k + 2$.
- したがって，$2(k+1) \leq 2^k + 2 \leq 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.
- したがって，$2(k+1) \leq 2^{k+1}$ となる． □

例題 3：数学的帰納法の変種

例題 3：証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ．

確認

- $n = 3$ のとき：$6n = 18 < 27 = 3^n$
- $n = 4$ のとき：$6n = 24 < 81 = 3^n$
- $n = 5$ のとき：$6n = 30 < 243 = 3^n$
- ...

注意：証明の方法

数学的帰納法を $n = 1$ から始めず，$n = 3$ から始める

例題 3：数学的帰納法の変種 (基底段階)

例題 3：証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ．

<u>証明 (基底段階)</u>：まず，$n = 3$ のときに正しいことを証明する．

- 左辺 $= 6n = 18$.
- 右辺 $= 3^n = 27$.
- したがって，$n = 3$ のとき $6n < 3^n$ となり，正しい．

例題 3：数学的帰納法の変種 (帰納段階)

例題 3：証明したいこと

3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n < 3^n$$

となることを証明せよ．

<u>証明 (帰納段階)</u>：次に，3 以上の任意の正整数 k を考える．

- $6k < 3^k$ であると仮定する．
- 証明すべきことは，$6(k+1) < 3^{k+1}$ である．
- $6(k+1) = 6k + 6 < 3^k + 6 < 3^k + 2 \cdot 3^k = 3^{k+1}$.
- したがって，$6(k+1) < 3^{k+1}$ となり，正しい． □

目次

クイズ

次に来るのは何？

$$1,\quad 3,\quad 7,\quad 13,\quad 21,\quad 31$$

$n^2+n+1, n=0,1,2,\ldots$

- 「...」はあいまい

格言

情報科学の本質の 1 つは「『無意識』を意識すること」

階乗

階乗とは？ (常識に基づく定義)

正の整数 n に対して，n の階乗とは

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$$

のこと

この定義の問題点

- 「$\cdots$」はあいまい

あいまいさのないように定義するには？

階乗：再帰的定義

階乗とは？ (再帰的定義)

正の整数 n に対して，n の階乗とは

$$n! = \begin{cases} 1 & (n=1\text{ のとき}) \\ n\cdot(n-1)! & (n>1\text{ のとき}) \end{cases}$$

のこと

実際の計算

- $n=1$ のとき：$1! = 1$
- $n=2$ のとき：$2! = 2\cdot 1! = 2\cdot 1 = 2$
- $n=3$ のとき：$3! = 3\cdot 2! = 3\cdot 2 = 6$
- $n=4$ のとき：$4! = 4\cdot 3! = 4\cdot 6 = 24$
- ...

例題 4：再帰的定義

例題 4：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1\text{ のとき}) \\ a_{n-1}+2 & (n>1\text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，任意の正の整数 n に対して，

$$a_n = 2n-1$$

となることを証明せよ

確認

- $n=1$ のとき：$a_1 = 1$
- $n=2$ のとき：$a_2 = a_1+2 = 1+2 = 3 = 2\cdot 2-1$
- $n=3$ のとき：$a_3 = a_2+2 = 3+2 = 5 = 2\cdot 3-1$
- ...

例題 4：数学的帰納法による証明 (基底段階)

例題 4：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1\text{ のとき}) \\ a_{n-1}+2 & (n>1\text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，任意の正の整数 n に対して，

$$a_n = 2n-1$$

となることを証明せよ

証明 (基底段階)：まず，$n=1$ のときを証明する．

- 左辺 $= a_1 = 1$.
- 右辺 $= 2\cdot 1-1 = 1$.
- したがって，$n=1$ のとき $a_n = 2n-1$ となる．

例題 4：数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 4：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1\text{ のとき}) \\ a_{n-1}+2 & (n>1\text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，任意の正の整数 n に対して，

$$a_n = 2n-1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階)：次に任意の正の整数 k を考える．

- $a_k = 2k-1$ であると仮定する．
- 証明すべきことは，$a_{k+1} = 2(k+1)-1$.
- $a_{k+1} = a_k+2 = (2k-1)+2 = 2(k+1)-1$.
- したがって，$a_{k+1} = 2(k+1)-1$ となる． $\square$

再帰的定義の例：フィボナッチ数

フィボナッチ数とは？

任意の正の整数 n に対して，第 n 番フィボナッチ数 F_n を

$$F_n = \begin{cases} 1 & (n=1\text{ のとき}) \\ 1 & (n=2\text{ のとき}) \\ F_{n-1}+F_{n-2} & (n>2\text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する

確認

- $n=1$ のとき：$F_1 = 1$
- $n=2$ のとき：$F_2 = 1$
- $n=3$ のとき：$F_3 = F_2+F_1 = 1+1 = 2$
- $n=4$ のとき：$F_4 = F_3+F_2 = 2+1 = 3$
- $n=5$ のとき：$F_5 = F_4+F_3 = 3+2 = 5$
- ...

フィボナッチ数の性質

例題 5 (カッシーニの恒等式)

第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき，任意の正整数 n に対して

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明 (基底段階)

例題 5 (カッシーニの恒等式)

第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき，任意の正整数 n に対して

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(基底段階) $n = 1$ の場合を証明する．

- 左辺 $= F_2^2 - F_3F_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$.
- 右辺 $= (-1)^1 = -1$.
- したがって，$n = 1$ のとき $F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$ は成り立つ

フィボナッチ数の性質：数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 5 (カッシーニの恒等式)

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ

証明：(帰納段階) 次に，1 以上の任意の正の整数 k を考える．

- $F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k$ であると仮定する．
- 証明すべきことは，$F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$ である．
- $F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1}$
  - $= F_{k+2}^2 - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+1}$ (フィボナッチ数の定義と $k+3 > 2$ から)
  - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2$ (展開して整理)
  - $= F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+2}F_k - (-1)^k$ (帰納法の仮定から)
  - $= F_{k+2}(F_{k+2} - F_{k+1} - F_k) + (-1)^{k+1}$ (因数分解して整理)
  - $= (-1)^{k+1}$. (フィボナッチ数の定義と $k+2 > 2$ から)
- したがって，$F_{k+2}^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$ となる． □

フィボナッチ数の公式

例題 6：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明の注意点

- F_n は F_{n-1}, F_{n-2} を使って定義される
- よって，(1 つ前だけ仮定する) 普通の帰納法では証明できない
- よって，もっと強い証明の仕方が必要となる
- 基底段階も $n = 1$ のときと $n = 2$ のときの 2 つが必要となる

数学的帰納法の強いバージョン

数学的帰納法の強いバージョン (累積帰納法とも呼ばれる)

[基底段階]

- $P(1)$ を証明する

[帰納段階] 任意の正の整数 k を考える

- 1 以上 k 以下の任意の正の整数 k' に対して $P(k')$ を仮定する
- $P(k+1)$ を証明する

- 前のバージョンでは帰納段階で「$P(k)$」のみを仮定した
- フィボナッチ数に関する証明では基底段階が $P(1)$ と $P(2)$ になる

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (基底段階 1)

例題 6：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明：まず，$n = 1$ のときを証明する．

- 左辺 $= F_1 = 1$.
- 右辺 $= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1$.
- したがって，$n = 1$ のときは正しい．

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (基底段階 2)

例題 6：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明：次に，$n = 2$ のときを証明する．

- 左辺 $= F_2 = 1$.
- 右辺 $= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)$
  $= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1$.
- したがって，$n = 2$ のときは正しい．

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (帰納段階 1)

例題 6：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明：k を 2 以上の任意の整数とする．

- 1 以上 k 以下の任意の整数 k' に対して，
  $F_{k'} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k'} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k'}\right)$ と仮定する．
- 証明すべきことは，$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)$ である．

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (帰納段階 2)

F_{k+1}

$= F_k + F_{k-1}$ (フィボナッチ数の定義と $k+1 > 2$)

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right)$ (帰納法の仮定)

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right)$ (式の整理)

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)$ (式の整理)

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)$ (式の整理)

したがって，$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)$ となる． □

目次

今日のまとめ

この講義の目標
- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標
- 数学的帰納法で証明ができるようになる
- 再帰的定義によって無限を扱う方法を理解する