

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 7 月 22 日

最終更新 : 2014 年 7 月 23 日 10:54

今日の概要

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 順序関係を図示する方法を理解する
 - ▶ ハッセル図
- ▶ 順序関係に関する概念を理解する
 - ▶ 上界, 極大元, 最大元, 上限 (最小上界)
 - ▶ 下界, 極小元, 最小元, 下限 (最大下界)

全順序関係 : 復習

集合 A と A 上の関係 R

全順序関係とは ?

R が **全順序関係** であるとは, 次を満たすこと

- ▶ R は反射性を持つ
 - ▶ R は反対称性を持つ
 - ▶ R は推移性を持つ
 - ▶ R は完全性を持つ
- ▶ 反射性 : 任意の $x \in A$ に対して, $x R x$
- ▶ 反対称性 : 任意の $x, y \in A$ に対して, $x R y$ かつ $y R x$ ならば $x = y$
- ▶ 推移性 : 任意の $x, y, z \in A$ に対して, $x R y$ かつ $y R z$ ならば $x R z$
- ▶ 完全性 : 任意の $x, y \in A$ に対して, $x R y$ または $y R x$

半順序集合と全順序集合

半順序集合とは ?

集合 A と A 上の半順序関係 \preceq に対して
順序対 (A, \preceq) を **半順序集合** と呼ぶ

全順序集合とは ?

集合 A と A 上の全順序関係 \preceq に対して
順序対 (A, \preceq) を **全順序集合** と呼ぶ

期末試験

▶ 日時, 場所

- ▶ 8 月 12 日 (火) 第 6 限, 新 C203 教室
(いつもの講義室ではないので注意)

▶ 出題範囲

- ▶ 第 7 回 (6 月 3 日) の最初から 第 12 回 (7 月 29 日) の最後までの内容
(第 13 回の内容は期末試験に出題しない)

▶ 出題形式

- ▶ 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
- ▶ その中の 3 題は演習問題として提示されたものと同一である
 - ただし, 発展問題は出題しない
- ▶ 全問に解答する

- ▶ 配点 : 1 題 10 点満点, 計 60 点満点

- ▶ 時間 : 90 分

- ▶ 持ち込み : A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

この日, この時間の都合がどうしても悪い場合

- ▶ 7/29 (火) の授業終了までに連絡

(半) 順序関係 : 復習

集合 A と A 上の関係 R

半順序関係とは ?

R が **半順序関係** であるとは, 次を満たすこと

- ▶ R は反射性を持つ
 - ▶ R は反対称性を持つ
 - ▶ R は推移性を持つ
- ▶ 反射性 : 任意の $x \in A$ に対して, $x R x$
- ▶ 反対称性 : 任意の $x, y \in A$ に対して, $x R y$ かつ $y R x$ ならば $x = y$
- ▶ 推移性 : 任意の $x, y, z \in A$ に対して, $x R y$ かつ $y R z$ ならば $x R z$

半順序関係を表す記号

半順序関係を表すために, R ではなくて, 特別な記号を使うことが多い

半順序関係を表す記号の例

- ▶ \leq
- ▶ \prec
- ▶ \leq
- ▶ \succ
- ▶ \subseteq
- ▶ \dots

その否定を表す記号の例

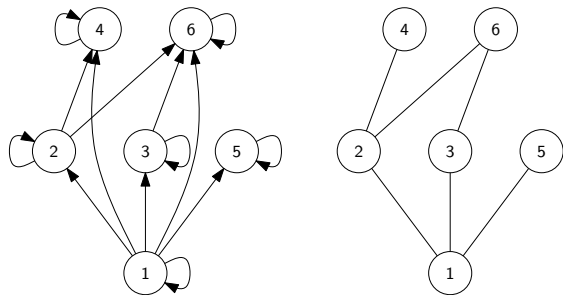
- ▶ $\not\leq$
- ▶ $\not\prec$
- ▶ $\not\leq$
- ▶ $\not\succ$
- ▶ $\not\subseteq$
- ▶ \dots

状況に応じて, 使い分けられたりする
(この講義では専ら「 \preceq 」を用いていく)

目次

- 1 ハッセル図
- 2 上界と下界
- 3 その他の用語
極大元, 極小元
最大元, 最小元
上限 (最小上界), 下限 (最大下界)
- 4 今日のまとめ

ハッセ図：とりあえず例を見てみる

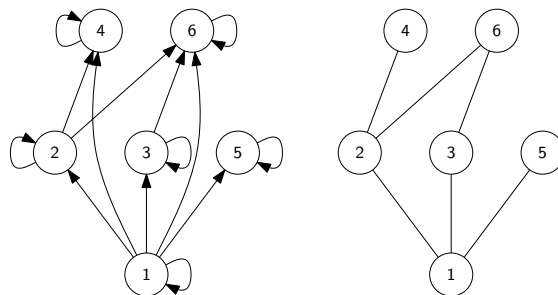


ハッセ図

ハッセ図とは？ (常識に基づく定義)

半順序集合 (A, \preceq) のハッセ図とは、次の規則に従って描いた図

- (1) A の各要素を点として描く

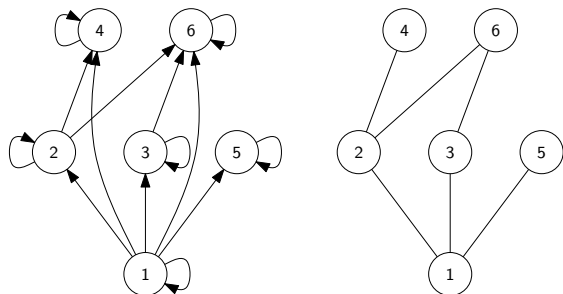


ハッセ図

ハッセ図とは？ (常識に基づく定義)

半順序集合 (A, \preceq) のハッセ図とは、次の規則に従って描いた図

- (2) \preceq において大きい要素ほど上に描く

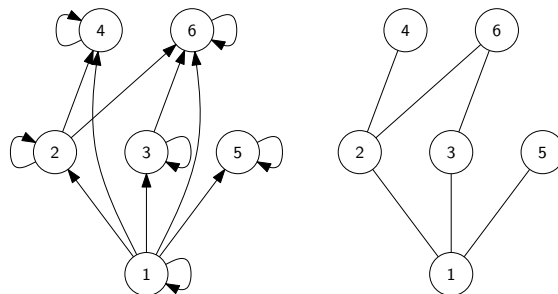


ハッセ図

ハッセ図とは？ (常識に基づく定義)

半順序集合 (A, \preceq) のハッセ図とは、次の規則に従って描いた図

- (3) $x \preceq y$ で、 x から y へ「遠回り」がないとき、 x と y を線で結ぶ

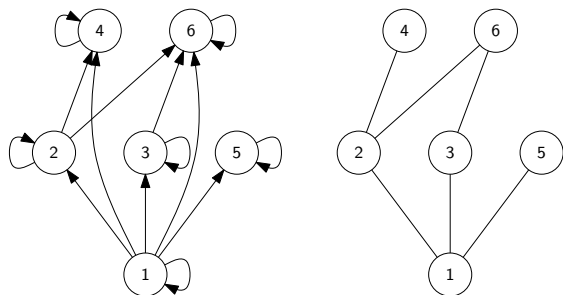


ハッセ図

ハッセ図とは？ (常識に基づく定義)

半順序集合 (A, \preceq) のハッセ図とは、次の規則に従って描いた図

- (4) どの線も下から上へ単調に描かれる



比較可能性と比較不能性

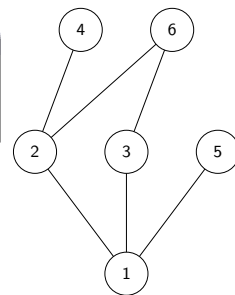
半順序集合 (A, \preceq)

比較可能とは？

- ▶ $x, y \in A$ が比較可能であるとは $x \preceq y$ または $y \preceq x$ であること
- ▶ そうでないとき、 x, y は比較不能

例：

- ▶ 2 と 6 は比較可能
- ▶ 1 と 4 は比較可能
- ▶ 2 と 3 は比較不能
- ▶ 4 と 6 は比較不能



格言

比較不能なものを扱える半順序思考

比較可能性と比較不能性：ハッセ図において

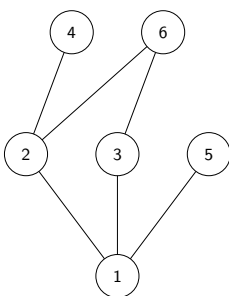
半順序集合 (A, \preceq)

ハッセ図で比較可能性を読み取る

- ▶ $x, y \in A$ が比較可能である \Leftrightarrow x と y を結ぶ単調な「道」が存在する
- ▶ $x, y \in A$ が比較可能でない \Leftrightarrow x と y を結ぶ単調な「道」が存在しない

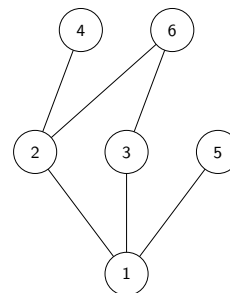
例：

- ▶ 2 と 6 は比較可能
- ▶ 1 と 4 は比較可能
- ▶ 2 と 3 は比較不能
- ▶ 4 と 6 は比較不能



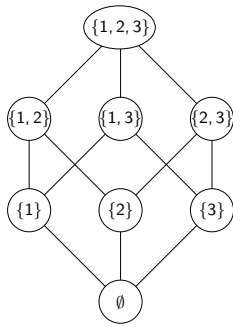
いろいろな半順序集合 (1)

$(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |)$ (「 $a | b$ 」とは「 a は b の約数」の意味)

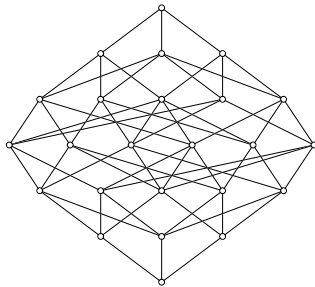


いろいろな半順序集合 (2)

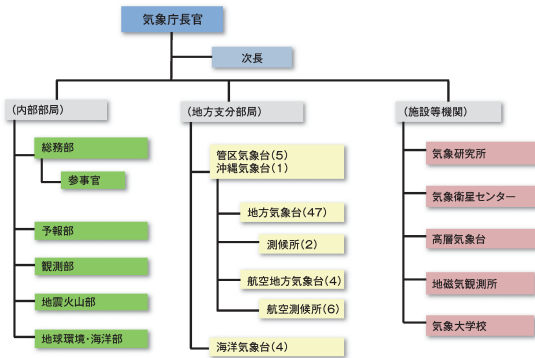
$(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$



いろいろな半順序集合 (4)



半順序集合の例 (1) : 階層的組織



<http://www.jma.go.jp/jma/kishou/intro/gyomu/index3.html>

その他の記法

半順序集合 (A, \preceq) について

- ▶ 「 $a \preceq b$ 」であることを「 $b \succeq a$ 」とも書く
- ▶ 「 $a \preceq b$ かつ $a \neq b$ 」であることを「 $a \prec b$ 」と書く
- ▶ 「 $a \prec b$ 」であることを「 $b \succ a$ 」とも書く

注意

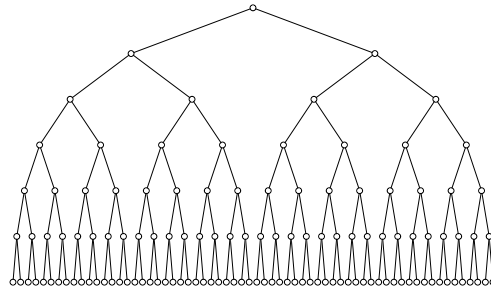
- ▶ 「 $a \preceq b$ 」と「 $a \succ b$ 」が同値であるとは限らない
- ▶ ただし、 \preceq が全順序ならば、この2つは同値 (演習問題)

いろいろな半順序集合 (3)

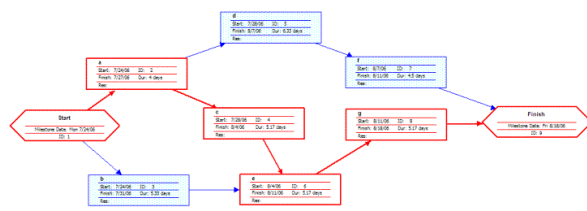
$(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$



いろいろな半順序集合 (5)



半順序集合の例 (2) : 先行関係を持つジョブのスケジューリング



http://en.wikipedia.org/wiki/File:PERT_example_network_diagram.gif

目次

- 1 ハッセ図
- 2 上界と下界
- 3 その他の用語
 - 極大元, 極小元
 - 最大元, 最小元
 - 上限 (最小上界), 下限 (最大下界)
- 4 今日のまとめ

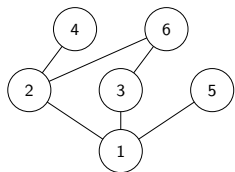
上界

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の上界とは？

集合 B の上界とは、要素 $a \in A$ で、次を満たすもの

任意の $b \in B$ に対して $b \preceq a$



- ▶ 6 は $\{2, 3\}$ の上界
- ▶ $2 \preceq 6$ は成立, $3 \preceq 6$ は成立

B の上界とは?: 直感的な説明

A の要素で、 B のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

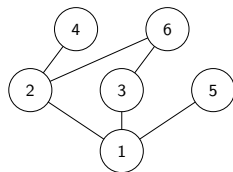
上界

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の上界とは？

集合 B の上界とは、要素 $a \in A$ で、次を満たすもの

任意の $b \in B$ に対して $b \preceq a$



- ▶ 4 は $\{2\}$ の上界
- ▶ $2 \preceq 4$ は成立

B の上界とは?: 直感的な説明

A の要素で、 B のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

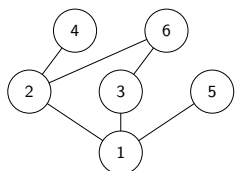
上界

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の上界とは？

集合 B の上界とは、要素 $a \in A$ で、次を満たすもの

任意の $b \in B$ に対して $b \preceq a$



- ▶ 2 は $\{2\}$ の上界
- ▶ $2 \preceq 2$ は成立

B の上界とは?: 直感的な説明

A の要素で、 B のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

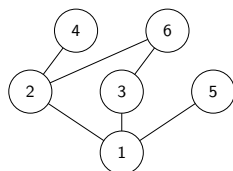
上界

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の上界とは？

集合 B の上界とは、要素 $a \in A$ で、次を満たすもの

任意の $b \in B$ に対して $b \preceq a$



- ▶ $\{2, 5\}$ の上界は存在しない
- ▶ $2 \preceq 1$ は不成立, $5 \preceq 1$ は不成立
- ▶ $2 \preceq 2$ は成立, $5 \preceq 2$ は不成立
- ▶ $2 \preceq 3$ は不成立, $5 \preceq 3$ は不成立
- ▶ $2 \preceq 4$ は成立, $5 \preceq 4$ は不成立
- ▶ $2 \preceq 5$ は不成立, $5 \preceq 5$ は成立
- ▶ $2 \preceq 6$ は成立, $5 \preceq 6$ は不成立

B の上界とは?: 直感的な説明

A の要素で、 B のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

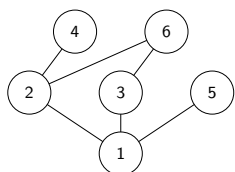
下界

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の下界 (かかい) とは？

集合 B の下界とは、要素 $a \in A$ で、次を満たすもの

任意の $b \in B$ に対して $a \preceq b$



- ▶ 1 は $\{2, 3\}$ の下界
- ▶ 1 は $\{2\}$ の下界
- ▶ 2 は $\{2\}$ の下界
- ▶ 2 は $\{2, 6\}$ の下界
- ▶ 1 は $\{2, 6\}$ の下界

B の下界とは?: 直感的な説明

A の要素で、 B のどの要素よりも下にある (あるいは同じ) もの

目次

- ① ハッセ図
- ② 上界と下界
- ③ その他の用語
 - 極大元, 極小元
 - 最大元, 最小元
 - 上限 (最小上界), 下限 (最大下界)
- ④ 今日のまとめ

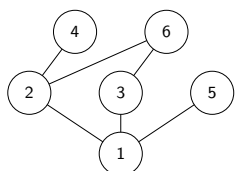
極大元

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の極大元とは？

集合 B の極大元とは、要素 $b \in B$ で、次を満たすもの

任意の $b' \in B$ に対して、 $b \preceq b'$ ならば $b = b'$



- ▶ 2 は $\{2, 3, 4\}$ の極大元ではない
- ▶ 3 は $\{2, 3, 4\}$ の極大元
- ▶ 4 は $\{2, 3, 4\}$ の極大元

B の極大元とは?: 直感的な説明

B の要素で、 B の他の要素がそれより上にならないもの

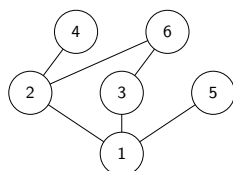
極小元

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の極小元とは？

集合 B の極小元とは、要素 $b \in B$ で、次を満たすもの

任意の $b' \in B$ に対して $b' \preceq b$ ならば $b = b'$



- ▶ 2 は $\{2, 3, 4\}$ の極小元
- ▶ 3 は $\{2, 3, 4\}$ の極小元
- ▶ 4 は $\{2, 3, 4\}$ の極小元ではない

B の極小元とは?: 直感的な説明

B の要素で、 B の他の要素がそれより下にならないもの

極大元が存在しない例

- ▶ 半順序集合 (\mathbb{R}, \leq) (注: これは全順序集合でもある)
- ▶ $B = (0, 1) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ かつ } 0 < x < 1\}$
- ▶ このとき, B の極大元は存在しない

証明すべきこと (定義に立ち戻って書き直す)

任意の $b \in B$ に対して,
「任意の $b' \in B$ に対して, $b \leq b'$ ならば $b = b'$ 」ではない

証明すべきこと (書き換え)

任意の $b \in B$ に対して,
「ある $b' \in B$ に対して, 『 $b \leq b'$ ならば $b = b'$ 』ではない」

証明のために行うこと

- ▶ 任意の $b \in B$ を考える
- ▶ b を使って, $b \leq b'$ であるが, $b = b'$ とならない $b' \in B$ を見つける

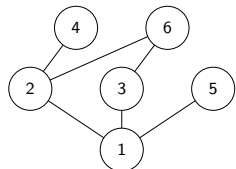
最大元

半順序集合 (A, \leq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の最大元とは?

集合 B の**最大元**とは, 要素 $b \in B$ で, 次を満たすもの

任意の $b' \in B$ に対して $b' \leq b$



- ▶ 2 は $\{2, 3, 6\}$ の最大元ではない
- ▶ 6 は $\{2, 3, 6\}$ の最大元
- ▶ $\{2, 3\}$ の最大元は存在しない

B の最大元とは?: 直感的な説明

B の要素で, B の他のどの要素よりも大きいもの

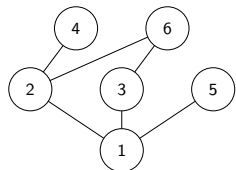
上限 (最小上界)

半順序集合 (A, \leq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の上限とは?

集合 B の**上限**とは, B の上界 $a \in A$ で, 次を満たすもの

B の任意の上界 $a' \in A$ に対して $a \leq a'$



- ▶ 6 は $\{2, 3\}$ の上限
- ▶ 2 は $\{2\}$ の上限

B の上限とは?: 直感的な説明

B の上界で, B の他のどの上界よりも小さいもの

様々な性質

半順序集合 (A, \leq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

- ▶ B の最大元は, 存在するならば, ただ一つ.
- ▶ B の最小元は, 存在するならば, ただ一つ.
- ▶ B の上限は, 存在するならば, ただ一つ.
- ▶ B の下限は, 存在するならば, ただ一つ.

証明は演習問題

極大元が存在しない例: 証明

- ▶ 任意の $b \in (0, 1)$ を考える.
- ▶ $\frac{b+1}{2}$ を考える
- ▶ $b > 0$ なので, $\frac{b+1}{2} > \frac{0+1}{2} > 0$.
- ▶ また, $b < 1$ なので, $\frac{b+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$.
- ▶ したがって, $\frac{b+1}{2} \in (0, 1)$.
- ▶ そして, $b \leq \frac{b+1}{2}$ かつ $b \neq \frac{b+1}{2}$.
- ▶ したがって, ある $b' \in (0, 1)$ が存在して, $b \leq b'$ かつ $b \neq b'$ となる.
- ▶ したがって, $(0, 1)$ の極大元は存在しない. \square

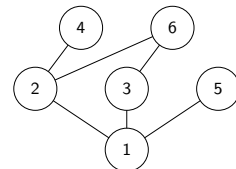
最小元

半順序集合 (A, \leq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の最小元とは?

集合 B の**最小元**とは, 要素 $b \in B$ で, 次を満たすもの

任意の $b' \in B$ に対して $b \leq b'$



- ▶ 2 は $\{1, 2, 3\}$ の最小元ではない
- ▶ 1 は $\{1, 2, 3\}$ の最小元
- ▶ $\{2, 3\}$ の最小元は存在しない

B の最小元とは?: 直感的な説明

B の要素で, B の他のどの要素よりも小さいもの

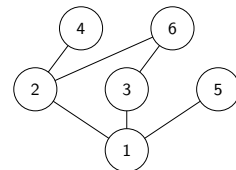
下限 (最大下界)

半順序集合 (A, \leq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の下限とは?

集合 B の**下限**とは, B の下界 $a \in A$ で, 次を満たすもの

B の任意の下界 $a' \in A$ に対して $a' \leq a$



- ▶ 1 は $\{2, 3\}$ の下限
- ▶ 2 は $\{2\}$ の下限

B の下限とは?: 直感的な説明

B の下界で, B の他のどの下界よりも大きいもの

目次

- 1 ハッセ図
- 2 上界と下界
- 3 その他の用語
極大元, 極小元
最大元, 最小元
上限 (最小上界), 下限 (最大下界)
- 4 今日のまとめ

今日のまとめ

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 順序関係を図示する方法を理解する
 - ▶ ハッセ図
- ▶ 順序関係に関する概念を理解する
 - ▶ 上界, 極大元, 最大元, 上限 (最小上界)
 - ▶ 下界, 極小元, 最小元, 下限 (最大下界)