離散数学 第 10 回
関係 (2)：同値関係

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 7 月 15 日

最終更新：2014 年 7 月 14 日　10:19

今日の概要

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 同値関係と分割の関係を理解する
  - 分割とは？
  - 分割から同値関係へ
  - 同値関係から分割へ
    - 同値分割と商集合

同値関係

集合 A と A 上の関係 R

同値関係とは？

R が同値関係であるとは，次を満たすこと

- R は反射性を持つ
- R は対称性を持つ
- R は推移性を持つ

- 反射性：任意の $x \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$
- 対称性：任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ ならば $y \mathrel{\mathrm{R}} x$
- 推移性：任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ ならば $x \mathrel{\mathrm{R}} z$

同値関係を表す記号

同値関係を表すために，R ではなくて，特別な記号を使うことが多い

同値関係を表す記号の例

- $=$
- $\equiv$
- $\sim$
- $\simeq$
- $\approx$
- ...

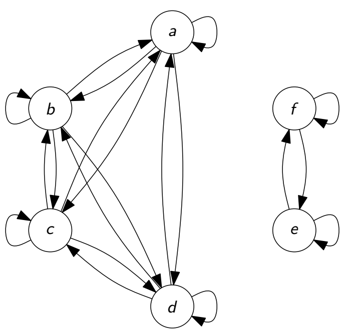
その否定を表す記号の例

- $\neq$
- $\not\equiv$
- $\not\sim$
- $\not\simeq$
- $\not\approx$
- ...

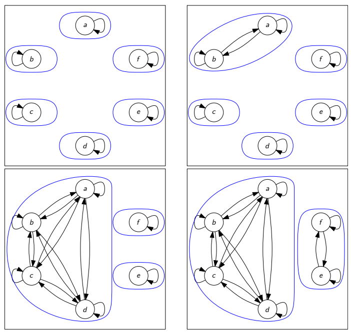
状況に応じて，使い分けられたりする

同値関係をグラフで描くとき...

これが同値関係を表すグラフだとすると？



同値関係が与える「かたまり」への分割



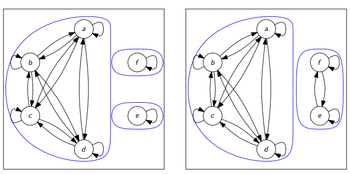
今日の目標

今から行うこと

次を証明する

- 「同値関係」から「『かたまり』への分割」が得られること
- 「『かたまり』への分割」から「同値関係」が得られること

つまり,「同値関係」と「分割」は同じものを別の方法で表現している



目次

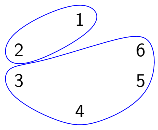
集合の分割

分割とは？

集合 A の**分割**とは次を満たすような集合 P のこと

- 任意の $X \in P$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$ (非空性)
- 任意の $X, Y \in P$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$ (素性)
- 任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ (被覆性)

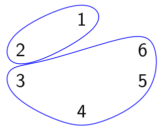
例：$A = \{1,2,3,4,5,6\}$ のとき，$\{\{1,2\},\{3,4,5,6\}\}$ は A の分割



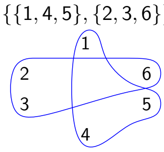
分割とは？: 例 (続き)

次の 4 つはどれも $\{1,2,3,4,5,6\}$ の分割

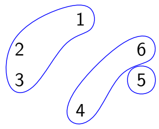
$\{\{1,2\},\{3,4,5,6\}\}$



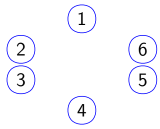
$\{\{1,4,5\},\{2,3,6\}\}$



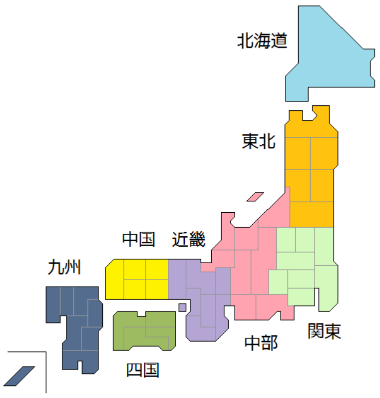
$\{\{1,2,3\},\{4,6\},\{5\}\}$



$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\}$



分割の例 1：日本の八地方区分



http://www.craftmap.box-i.net/

分割の例 2：カレンダー

1ヵ月の 31 日をいろいろな方法で分割している

日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

- 1 日 1 日で分割 (31 個の集合へ分割)
- 週ごとに分割 (5 個の集合へ分割)
- 曜日ことに分割 (7 個の集合へ分割)
- ...

目次

分割から同値関係へ

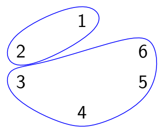
集合 A の分割 P を考える

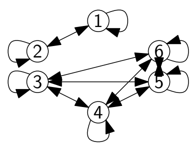
分割から同値関係へ

- A 上の関係 R を，任意の $x, y \in A$ に対して $x \mathrel{\mathrm{R}} y$ であることを

  ある $X \in P$ が存在して,$x \in X$ かつ $y \in X$ である

  こととして定義する
- このとき，R は A 上の同値関係である





分割から同値関係へ：証明 (反射性)

証明すべきこと (1)：反射性

任意の $x \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$

定義に立ち戻って書きなおす

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $x \in X$

証明：任意に $x \in A$ を選ぶ．

- P は A の分割なので，分割の被覆性から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$.
- したがって，ある $X \in P$ が存在して $x \in X$ かつ $x \in X$.
- したがって，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$. $\square$

分割から同値関係へ：証明 (対称性)

証明すべきこと (2)：対称性

任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ ならば $y \mathrel{\mathrm{R}} x$

定義に立ち戻って書きなおす

任意の $x, y \in A$ に対して，
「ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$」ならば
「ある $X \in P$ が存在して，$y \in X$ かつ $x \in X$」

証明：任意に $x, y \in A$ を選び，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ と仮定する．

- R の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$.
- すなわち，ある $X \in P$ が存在して，$y \in X$ かつ $x \in X$.
- したがって，$y \mathrel{\mathrm{R}} x$. $\square$

分割から同値関係へ：証明 (推移性)

証明すべきこと (3)：推移性

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ ならば $x \mathrel{\mathrm{R}} z$

証明：任意に $x, y, z \in A$ を選び，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ と仮定する．

- R の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$.
- 同様に，ある $X' \in P$ が存在して，$y \in X'$ かつ $z \in X'$.
- $y \in X$ と $y \in X'$ から，$y \in X \cap X'$.
- 特に，$X \cap X' \neq \emptyset$.
- 分割の素性から，$X = X'$.
- したがって，$x \in X$ かつ $z \in X$.
- したがって，$x \mathrel{\mathrm{R}} z$. □

目次

同値類

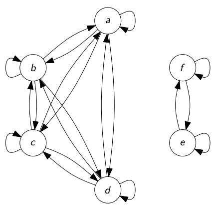
集合 A 上の同値関係 R を考える

同値類とは？

同値関係 R における要素 $a \in A$ の**同値類**とは

$$\{x \mid x \in A \text{ かつ } x \mathrel{\mathrm{R}} a\}$$

という集合のことであり，これを $[a]_{\mathrm{R}}$ とも書く



- $[a]_{\mathrm{R}} = \{a, b, c, d\}$
- $[b]_{\mathrm{R}} = \{a, b, c, d\}$
- $[c]_{\mathrm{R}} = \{a, b, c, d\}$
- $[d]_{\mathrm{R}} = \{a, b, c, d\}$
- $[e]_{\mathrm{R}} = \{e, f\}$
- $[f]_{\mathrm{R}} = \{e, f\}$

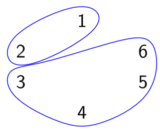
商集合

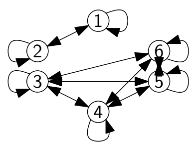
商集合とは？

集合 A 上の同値関係 R に対して，

$$A \,/\, \mathrm{R} = \{[a]_{\mathrm{R}} \mid a \in A\}$$

を R に関する A の**商集合**と呼ぶ．





$A \,/\, \mathrm{R} = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$

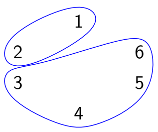
同値関係から分割へ

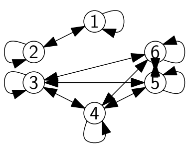
集合 A 上の同値関係 R を考える

同値関係から分割へ

商集合 $A \,/\, \mathrm{R}$ は A の分割である

これゆえ，R に関する A の商集合のことを，R に関する A の**同値分割**とも呼ぶ





同値関係から分割へ：証明 (非空性)

証明すべきこと (1)：非空性

任意の $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明：任意に $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ を選ぶ．

- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- 同値類の定義から，$[a]_{\mathrm{R}} \subseteq A$.
- したがって，$X \subseteq A$.

- 同値関係の反射性から，$a \mathrel{\mathrm{R}} a$.
- 同値類の定義から，$a \in [a]_{\mathrm{R}}$.
- したがって，$[a]_{\mathrm{R}} \neq \emptyset$.
- したがって，$X \neq \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

証明：任意に $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ を選ぶ．

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する． ....(1)
- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_{\mathrm{R}}$.
- 仮定 (1) より，ある $a'' \in A$ が存在して，$a'' \in X$ かつ $a'' \in Y$.
- すなわち，$a'' \in [a]_{\mathrm{R}}$ かつ $a'' \in [a']_{\mathrm{R}}$.
- 同値類の定義から，$a'' \mathrel{\mathrm{R}} a$ かつ $a'' \mathrel{\mathrm{R}} a'$.
- $a'' \mathrel{\mathrm{R}} a$ と同値関係の対称性から，$a \mathrel{\mathrm{R}} a''$.
- $a \mathrel{\mathrm{R}} a''$，$a'' \mathrel{\mathrm{R}} a'$ と同値関係の推移性から，$a \mathrel{\mathrm{R}} a'$.
- $a \mathrel{\mathrm{R}} a'$ から，$[a]_{\mathrm{R}} = [a']_{\mathrm{R}}$. (演習問題)
- したがって，$X = Y$.
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (被覆性)

証明すべきこと (3)：被覆性

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ が存在して，$x \in X$

証明：任意に $x \in A$ を選ぶ．

- $X = [x]_{\mathrm{R}}$ とする．
- 反射性から，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$.
- 同値類の定義から，$x \in [x]_{\mathrm{R}}$.
- したがって，$x \in X$. □

目次

今日のまとめ

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 同値関係と分割の関係を理解する
  - 分割とは？
  - 分割から同値関係へ
  - 同値関係から分割へ
    - 同値分割と商集合

格言

本質的に同一であるものが，異なる表現を持つことはよくある

同値関係	分割
局所的 (local)	大域的 (global)
微視的 (micro)	巨視的 (macro)