離散数学 第 8 回
関数 (2)：全射と単射

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 6 月 17 日

最終更新：2014 年 6 月 16 日　10:56

今日の概要

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 特殊な関数「全射」,「単射」,「全単射」を理解して，その性質と違いを論述できるようになる
- 全単射の逆関数を理解し，構成できるようになる

目次

マンツーマンディフェンス

全単射の例

新幹線の指定席

単射の例

目次

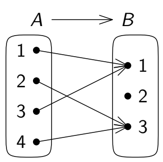
全射

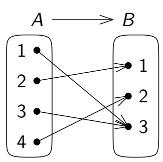
集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全射とは？

f が全射であるとは，次を満たすこと

$$\text{任意の } b \in B \text{ に対して，ある } a \in A \text{ が存在して } b = f(a)$$



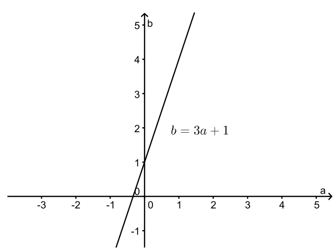


例題 1

例題 1

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$



例題 1：続き

例題 1

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

格言 (第 1 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

全射の定義に立ち戻って書き直す

任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法 (第 2 回講義より)

1. 「任意の〜を考える」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

例題 1：証明

例題 1

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

証明：任意の $b \in \mathbb{R}$ を考える．

- (ここで,「ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$」となることを証明する)
- したがって，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$
- したがって，f は全射である． □

「〜が存在する」という命題の証明法

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

例題 1：証明

例題 1

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

証明：任意の $b \in \mathbb{R}$ を考える．

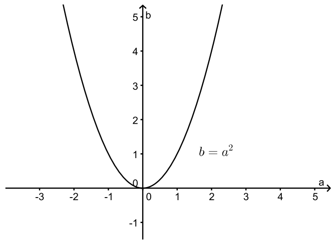
- $a = \frac{b-1}{3}$ とする．
- $b \in \mathbb{R}$ なので，$a \in \mathbb{R}$ である．
- また，$3a + 1 = 3 \cdot \frac{b-1}{3} + 1 = b$ となる．
- したがって，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$
- したがって，f は全射である． □

例題 2

例題 2

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$



例題 2：続き

例題 2

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = a^2$」ではない

整理する

ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$b \neq a^2$

「〜が存在する」という命題の証明法

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

例題 2：証明

例題 2

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

証明：$-1 \in \mathbb{R}$ を考える．

- (ここで,「任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$-1 \neq a^2$」を証明する．)
- したがって，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$-1 \neq a^2$.
- したがって，f は全射でない． □

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法 (第 2 回講義より)

1. 「任意の〜を考える」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

例題 2：証明

例題 2

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

証明：$-1 \in \mathbb{R}$ を考える．

- 任意の $a \in \mathbb{R}$ を考える．
- このとき，$a^2 \geq 0$ なので，$-1 \neq a^2$.
- したがって，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$-1 \neq a^2$.
- したがって，f は全射でない． □

補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと全射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は全射か？

- $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,　　$f_1(a) = a^2$
- $f_2\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$,　　$f_2(a) = a^2$
- $f_3\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$,　　$f_3(a) = a^2$
- $f_4\colon [0, 1] \to [0, \infty)$,　　$f_4(a) = a^2$

格言 (再掲)

関数の始域と終域を常に意識　　(似たものに「行列のサイズ」がある)

目次

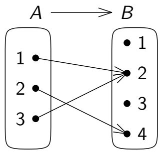
単射

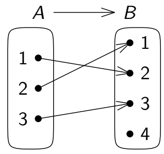
集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

単射とは？

f が単射であるとは，次を満たすこと

$$\text{任意の } a, a' \in A \text{ に対して，}\quad f(a) = f(a') \text{ ならば } a = a'$$





例題 3

例題 3

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射であることを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

定義に立ち戻って書き直す

任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$3a + 1 = 3a' + 1$ ならば $a = a'$

例題 3：証明

例題 3

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射であることを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

証明：任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ を考える．
- $3a + 1 = 3a' + 1$ であると仮定する．
- このとき，$a = a'$ である．
- したがって，f は単射である． □

例題 4

例題 4

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射でないことを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$a^2 = a'^2$ ならば $a = a'$」ではない

整理する

ある $a, a' \in \mathbb{R}$ が存在して「$a^2 = a'^2$ ならば $a = a'$」ではない

つまり，$a^2 = a'^2$ だが $a \neq a'$ となる $a, a' \in \mathbb{R}$ を見つければよい

例題 4

例題 4

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射でないことを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

証明：$a = 2 \in \mathbb{R}$ と $a' = -2 \in \mathbb{R}$ を考える．
- このとき，$a^2 = 4 = a'^2$ であるが，$a \neq a'$ である．
- したがって，f は単射でない． □

補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと単射かどうか変わるかも

次の 4 つの関数は単射か？
- $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_1(a) = a^2$
- $f_2\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $\quad f_2(a) = a^2$
- $f_3\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\quad f_3(a) = a^2$
- $f_4\colon [0, 1] \to [0, \infty)$, $\quad f_4(a) = a^2$

格言 (再々掲)

関数の始域と終域を常に意識　(似たものに「行列のサイズ」がある)

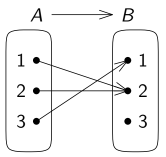
目次

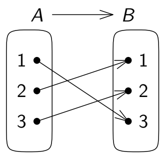
全単射

集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全単射とは？

f が全単射であるとは，全射であり，かつ，単射であること





逆関数

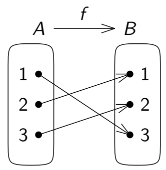
集合 A, B と全単射 $f\colon A \to B$

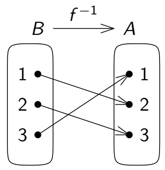
逆関数とは？

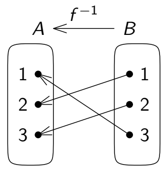
f の逆関数とは $f^{-1}\colon B \to A$ で，

$$\text{任意の } a \in A,\ b \in B \text{ に対して } a = f^{-1}(b) \text{ と } b = f(a) \text{ が同値}$$

となるもののことである







例題 5

例題 5

次の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

は全単射であるが (例題 1，3)，その逆関数 $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$\text{任意の } b \in \mathbb{R} \text{ に対して } f^{-1}(b) = \frac{b-1}{3}$$

で与えられることを証明せよ．

証明：同値変形により証明する．任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，

$$b = f(a) \Leftrightarrow b = 3a + 1 \Leftrightarrow a = \frac{b-1}{3}$$

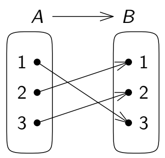
したがって，$f^{-1}(b) = \frac{b-1}{3}$. □

逆関数と逆像：注意

注意

関数 $f\colon A \to B$

- $Y \subseteq B$ のとき，$f^{-1}(Y)$ は Y の逆像
  - f が全単射であろうがなかろうが定義される
- $b \in B$ のとき，$f^{-1}(b)$ は f の逆関数 f^{-1} の b における値
  - f が全単射であるときのみ定義される



- $f^{-1}(\{1, 2\}) = \{2, 3\}$
- $f^{-1}(\{2\}) = \{3\}$
- $f^{-1}(2) = 3$

もう一つ注意

全単射の逆関数も全単射 (演習問題)

目次

今日のまとめ

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 特殊な関数「全射」,「単射」,「全単射」を理解して，
  その性質と違いを論述できるようになる
- 全単射の逆関数を理解し，構成できるようになる