離散数学 第 7 回
関数 (1)：像と逆像

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 6 月 3 日

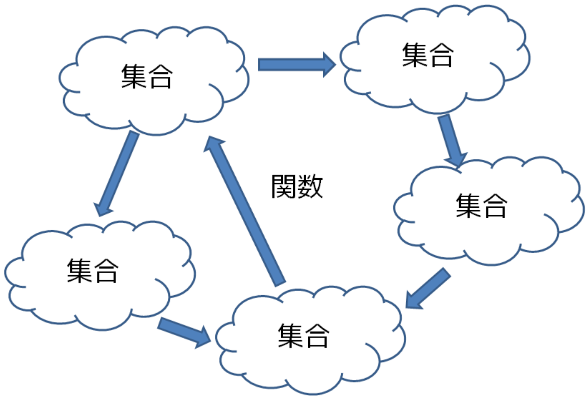
最終更新：2014 年 6 月 2 日　11:02

今日の概要

この講義の目標
- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標
- 関数 (写像) の定義と記法を理解し，使えるようになる
- 関数の像と逆像，関数の合成を理解する

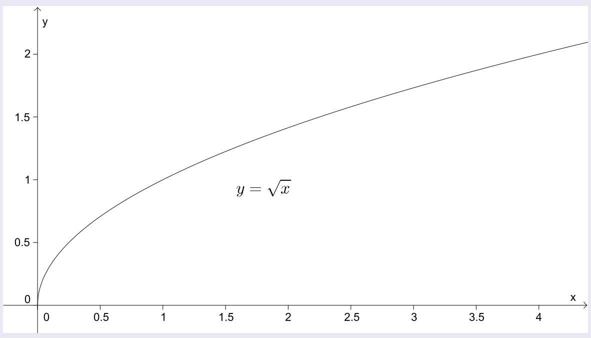
ここまでのまとめ と ここからの話



目次

関数と言って思い浮かべるものは？ (1)

数学 (?) の「関数」
関数 $y = \sqrt{x}$



関数と言って思い浮かべるものは？ (2)

プログラミングの「関数」
```
int sum(int a, int b) {
  return a + b;
}

int absolute_value(int a) {
  if (a < 0) {
    return -a;
  } else {
    return a;
  }
}
```


関数とは

関数とは？
- 集合が 2 つある (A と B とする)
- A の 1 つ 1 つの要素を B のある要素に「移す」

数学的に関数を定義すると？
- 任意の $a \in A$ に対して，ある $b \in B$ が一意に (ただ一つ) 存在して，a を b に移す

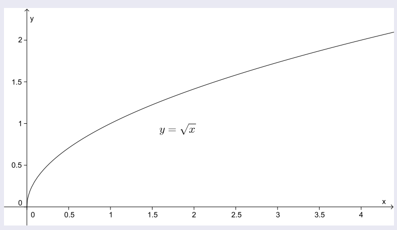
記法は？
- 関数 $f\colon A \to B$
- 任意の $a \in A$ に対して，ある $b \in B$ が一意に存在して，$f(a) = b$

注：f によって a を移したものを $f(a)$ と書く

「関数」を「写像」とも呼ぶ

関数と言って思い浮かべるものは？ (1) 再掲

数学 (?) の「関数」
関数 $y = \sqrt{x}$



- $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$
- 任意の $x \in [0, +\infty)$ に対して $f(x) = \sqrt{x}$

関数と言って思い浮かべるものは？ (2) 再掲

プログラミングの「関数」

```
int sum(int a, int b) {
  return a + b;
}
```

- sum: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
- 任意の $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に対して sum$((a, b)) = a + b$

関数と言って思い浮かべるものは？ (2) 再掲 (続)

プログラミングの「関数」

```
int absolute_value(int a) {
  if (a < 0) {
    return -a;
  } else {
    return a;
  }
}
```

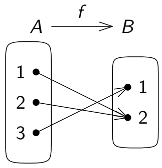
- absolute_value: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
- 任意の $a \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\texttt{absolute\_value}(a) = \begin{cases} -a & (a < 0 \text{ のとき}) \\ a & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

関数の例

- $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$
- 関数 $f: A \to B$ を次のように定義
  - $f(1) = 2$, $f(2) = 2$, $f(3) = 1$

$f(1) = 2$
$f(2) = 2$
$f(3) = 1$



a	$f(a)$
1	2
2	2
3	1

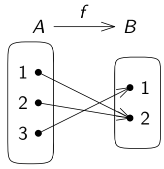
$1 \overset{f}{\mapsto} 2$
$2 \overset{f}{\mapsto} 2$
$3 \overset{f}{\mapsto} 1$

関数にまつわる記法と用語

集合 A, B と関数 $f: A \to B$

- $A \xrightarrow{f} B$
- $b = f(a)$ のとき「$f: a \mapsto b$」や「$a \overset{f}{\mapsto} b$」
- $f(a)$ を a における f の**値**という
- A を f の**始域** (または**定義域**) という
- B を f の**終域** という

$f(1) = 2$
$f(2) = 2$
$f(3) = 1$



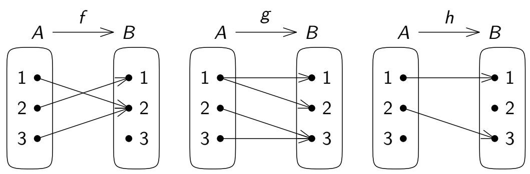
a	$f(a)$
1	2
2	2
3	1

$1 \overset{f}{\mapsto} 2$
$2 \overset{f}{\mapsto} 2$
$3 \overset{f}{\mapsto} 1$

格言

関数の始域と終域を常に意識　(似たものに「行列のサイズ」がある)

問題：次の図の中で関数を表すものは？



2 つの関数が等しいということ

集合 A, B, C, D と関数 $f: A \to B$, $g: C \to D$

f と g が等しいとは？

関数 f と g が等しいことを「$f = g$」と書き，次の条件がすべて成り立つことと定義する

- $A = C$　(f と g の始域が等しい)
- $B = D$　(f と g の終域が等しい)
- すべての $a \in A$ に対して，$f(a) = g(a)$　(関数の値が等しい)

恒等関数

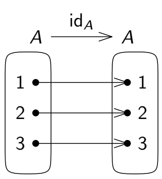
集合 A と関数 $f: A \to A$

恒等関数とは？

f が**恒等関数**であるとは，
任意の $a \in A$ に対して $a = f(a)$ であること

- $A \to A$ の恒等関数を id_A と書くこともある
- 例：$A = \{1, 2, 3\}$ のとき $f: A \to A$ で

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 3$$



目次

関数の像

$f\colon A \to B$ を関数とする

像とは？

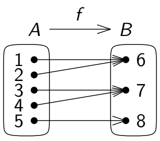
f による部分集合 $X \subseteq A$ の像を $f(X)$ と書き

$$f(X) = \{b \mid b \in B \text{ かつ，ある } a \in X \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

注意

- X は A の部分集合 (A の要素ではない)
- $f(X)$ は B の部分集合

例



- $f(\{1,2\}) = \{6\}$
- $f(\{1,2,3\}) = \{6,7\}$
- $f(\{1,2,3,4\}) = \{6,7\}$
- $f(\{1,2,3,4,5\}) = \{6,7,8\}$
- $f(\{2\}) = \{6\}$

関数の像：例をより詳細に

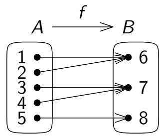
$f\colon A \to B$ を関数とする

像とは？

f による部分集合 $X \subseteq A$ の像を $f(X)$ と書き

$$f(X) = \{b \mid b \in B \text{ かつ，ある } a \in X \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

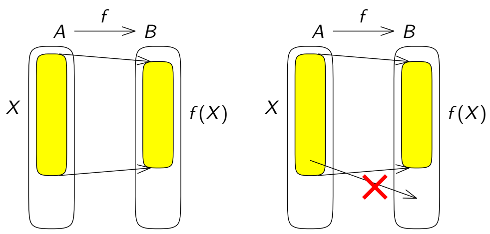
例：$f(\{1,2,3\})$ は？



- $6 \in f(\{1,2,3\})$ か？
  - $6 = f(1)$ なので YES
- $7 \in f(\{1,2,3\})$ か？
  - $7 = f(3)$ なので YES
- $8 \in f(\{1,2,3\})$ か？
  - $8 \neq f(1), 8 \neq f(2), 8 \neq f(3)$ なので NO

したがって，$f(\{1,2,3\}) = \{6,7\}$

関数の像：図による直感



関数の逆像

$f\colon A \to B$ を関数とする

逆像とは？

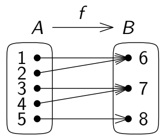
f による部分集合 $Y \subseteq B$ の逆像 (または原像) を $f^{-1}(Y)$ と書き

$$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A \text{ かつ，ある } b \in Y \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

注意

- Y は B の部分集合 (B の要素ではない)
- $f^{-1}(Y)$ は A の部分集合

例



- $f^{-1}(\{6\}) = \{1,2\}$
- $f^{-1}(\{6,7\}) = \{1,2,3,4\}$
- $f^{-1}(\{6,7,8\}) = \{1,2,3,4,5\}$
- $f^{-1}(\{7,8\}) = \{3,4,5\}$
- $f^{-1}(\{6,8\}) = \{1,2,5\}$

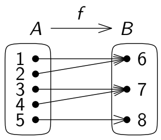
関数の逆像：例をより詳細に

逆像とは？

f による部分集合 $Y \subseteq B$ の逆像 (または原像) を $f^{-1}(Y)$ と書き

$$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A \text{ かつ，ある } b \in Y \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

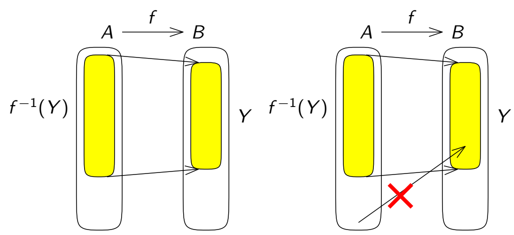
例：$f^{-1}(\{6,7\})$ は？



- $1 \in f^{-1}(\{6,7\})$ か？
  - $6 = f(1)$ なので YES
- $2 \in f^{-1}(\{6,7\})$ か？
  - $6 = f(2)$ なので YES
- $3 \in f^{-1}(\{6,7\})$ か？
  - $7 = f(3)$ なので YES
- $4 \in f^{-1}(\{6,7\})$ か？
  - $7 = f(4)$ なので YES
- $5 \in f^{-1}(\{6,7\})$ か？
  - $6 \neq f(5)$，$7 \neq f(5)$ なので NO

したがって，$f^{-1}(\{6,7\}) = \{1,2,3,4\}$

関数の逆像：図による直感



目次

関数の合成

集合 A, B, C と関数 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$

関数の合成とは？

関数 f と g の合成を $g \circ f\colon A \to C$ と表記し，任意の $x \in A$ に対して

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

とすることで定義する

注意：f の終域と g の始域が同じでないといけない
(同じでないときは合成を定義できない)

関数の合成：例

- $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6,7\}$, $C = \{8,9\}$
- 関数 $f \colon A \to B$ を次で定義
  - $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(3) = 7$
- 関数 $g \colon B \to C$ を次で定義
  - $g(4) = 8$, $g(5) = 9$, $g(6) = 9$, $g(7) = 8$

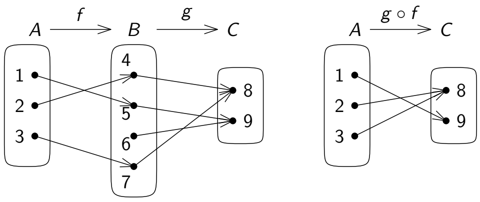
このとき，$g \circ f \colon A \to C$ を考えると，

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(7) = 8$$

関数の合成：例 (続)

- $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6,7\}$, $C = \{8,9\}$
- 関数 $f \colon A \to B$ を次で定義
  - $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(3) = 7$
- 関数 $g \colon B \to C$ を次で定義
  - $g(4) = 8$, $g(5) = 9$, $g(6) = 9$, $g(7) = 8$

このとき，$g \circ f \colon A \to C$ を考えると，



目次

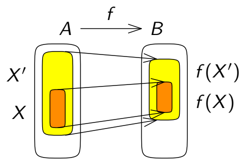
例題 1

例題 1：次を証明せよ

任意の集合 A, B，任意の関数 $f \colon A \to B$，任意の $X, X' \subseteq A$ に対して

$$X \subseteq X' \text{ ならば } f(X) \subseteq f(X')$$

図による直感



「任意の〜に対して…である」という命題の証明法 (第 2 回講義より)

1. 「任意の〜を考える」で始め，「したがって，…である」で終わる
2. それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

例題 1：証明

証明：任意の集合 A, B，任意の関数 $f \colon A \to B$，任意の集合 $X, X' \subseteq A$ を考える．

- (ここで「$X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$」を証明する)
- したがって，$X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ である． □

「〜ならば…である」という命題の証明法 (第 3 回講義より)

1. 「〜であると仮定する」で始め，「したがって，…である」で終わる
2. 「〜である」という性質を用いて，「…である」を証明する

例題 1：証明

証明：任意の集合 A, B，任意の関数 $f \colon A \to B$，任意の集合 $X, X' \subseteq A$ を考える．

- $X \subseteq X'$ であると仮定する．
- (ここで仮定を用いて「$f(X) \subseteq f(X')$」を証明する)
- したがって，$f(X) \subseteq f(X')$ である．
- したがって，$X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ である． □

格言 (第 1 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

「$f(X) \subseteq f(X')$」を定義に立ち戻って書き換える

$b \in f(X)$ ならば $b \in f(X')$

例題 1：証明

証明：任意の集合 A, B，任意の関数 $f \colon A \to B$，任意の集合 $X, X' \subseteq A$ を考える．

- $X \subseteq X'$ であると仮定する．
- (ここで仮定を用いて「$b \in f(X)$ ならば $b \in f(X')$」を証明する)
- したがって，$f(X) \subseteq f(X')$ である．
- したがって，$X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ である． □

「〜ならば…である」という命題の証明法 (第 3 回講義より)

1. 「〜であると仮定する」で始め，「したがって，…である」で終わる
2. 「〜である」という性質を用いて，「…である」を証明する

例題 1：証明

証明：任意の集合 A, B，任意の関数 $f \colon A \to B$，任意の集合 $X, X' \subseteq A$ を考える．

- $X \subseteq X'$ であると仮定する．
- $b \in f(X)$ であると仮定する．
- (ここで仮定を用いて「$b \in f(X')$」を証明する)
- したがって，$b \in f(X')$ である．
- したがって，$f(X) \subseteq f(X')$ である． □

「$b \in f(X')$」を定義に立ち戻って書き換える

ある $a \in X'$ が存在して，$b = f(a)$

「〜が存在する」という命題の証明法 (第 1 回講義より)

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ，「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)．

例題 1：整理，あるいは下書き

目標

$b = f(a)$ となる $a \in X'$ を見つける

用いる性質

(1) $X \subseteq X'$
(2) $b \in f(X)$
(3) ある $a \in X$ が存在して，$b = f(a)$ ((2) より)
(4) $b = f(a)$ を満たす $a \in X$ を考える ((3) より)

「○○を満たす△△が存在する」が使えるとき (今回初登場)

1. 「○○を満たす△△を考える」とする
2. その△△を使って，証明を進める

例題 1：整理，あるいは下書き

目標

$b = f(a)$ となる $a \in X'$ を見つける

用いる性質

(1) $X \subseteq X'$
(2) $b \in f(X)$
(3) ある $a \in X$ が存在して，$b = f(a)$ ((2) より)
(4) $b = f(a)$ を満たす $a \in X$ を考える ((3) より)
(5) $a \in X$ ならば $a \in X'$ ((1) より)
(6) $a \in X'$ ((4) と (5) より)

モードゥス・ポネンスによる推論 (第 3 回講義より)

「○○ならば□□である」ことが正しい
「○○」が正しい $\Rightarrow$ 「□□」も正しい

例題 1：整理，あるいは下書き

目標

$b = f(a)$ となる $a \in X'$ を見つける

用いる性質

(1) $X \subseteq X'$
(2) $b \in f(X)$
(3) ある $a \in X$ が存在して，$b = f(a)$ ((2) より)
(4) $b = f(a)$ を満たす $a \in X$ を考える ((3) より)
(5) $a \in X$ ならば $a \in X'$ ((1) より)
(6) $a \in X'$ ((4) と (5) より)

注

(4) で考えた a が
「$b = f(a)$ となる $a \in X'$ を見つける」という目標の下で見つけた a

例題 1：証明

証明：任意の集合 A, B，任意の関数 $f\colon A \to B$，任意の集合 $X, X' \subseteq A$ を考える．

- $X \subseteq X'$ であると仮定する． ....(1)
- $b \in f(X)$ であると仮定する． ....(2)
- (2) より，ある $a \in X$ が存在して，$b = f(a)$ となる． ....(3)
- (3) より，$b = f(a)$ を満たす $a \in X$ を考える． ....(4)
- (1) より，$a \in X$ ならば $a \in X'$ となる． ....(5)
- (4) と (5) より，$a \in X'$ となる．
- したがって，(4) で考えた a は $b = f(a)$ と $a \in X'$ を満たす．
- したがって，$b \in f(X')$ である．
- したがって，$f(X) \subseteq f(X')$ である． □

目次

今日のまとめ

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 関数 (写像) の定義と記法を理解し，使えるようになる
- 関数の像と逆像，関数の合成を理解する

余談：「関数」という用語

『数学の言葉づかい 100』(日本評論社，1999 年) 58 ページより

関数の用語 functio は 17 世紀末ライプニッツにより初めて用いられた．

(中略)

関数がよく f で表されるのはこれにちなむもので，各国語でもこのラテン語の直訳として function, Funktion, fonction, (中略) などが用いられている．わが国へは中国で音訳された函数が輸入され，現在では代用漢字による関数があてられて，初等教育の段階でほぼ定着した．