離散数学 第 6 回
証明法 (4)：集合に関する証明

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 5 月 27 日

最終更新：2014 年 5 月 27 日　17:44

中間試験

- 日時，場所
  - 6 月 10 日 (火) 第 6 限，A201 教室
- 出題範囲
  - 第 1 回 (4 月 8 日) の最初から 第 6 回 (5 月 27 日) の最後までの内容
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 3 題は演習問題として提示されたものと同一である
    - ただし，発展問題は出題しない
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 10 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

この日，この時間の都合がどうしても悪い場合

- 5/27 (火) の授業終了までに連絡 ←今日

今日の概要

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

集合の包含関係に関する証明ができるようになる

- 推論の類型：選言三段論法
- 推論の類型：モードゥス・トレンス
- 推論の類型：空ゆえに真

目次

1. 集合の包含関係に関する証明
   - 例題 1
   - 例題 2
   - 例題 3
2. 集合の包含関係に関する証明：空集合の扱い
   - 例題 4
   - 例題 5
3. 今日のまとめ

例題 1

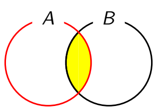
例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して，

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する．

オイラー図による直感



直感：正しそう

例題 1：正しいことの証明に向けて

例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して，

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する．

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法 (第 2 回講義より)

1. 「任意の〜を考える」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

例題 1：正しいことの証明

例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して，

$$A \cap B \subseteq A$$

が成立する．

<u>正しいことの証明</u>：任意の集合 A, B を考える．

- (ここで,「$A \cap B \subseteq A$」であることを証明する)
- したがって，$A \cap B \subseteq A$ である． □

次のステップ

「$A \cap B \subseteq A$」の証明

例題 1：正しいことの証明

次のステップ

「$A \cap B \subseteq A$」の証明

格言 (第 1 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

「$A \cap B \subseteq A$」を定義に立ち戻って書き換える

$x \in A \cap B$ ならば $x \in A$

さらに「$x \in A \cap B$」も書き換える

$(x \in A$ かつ $x \in B)$ ならば $x \in A$

「〜ならば…である」という命題の証明法 (第 3 回講義より)

1. 「〜であると仮定する」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. 「〜である」という性質を用いて,「…である」を証明する

例題 1：正しいことの証明

例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して，
$$A \cap B \subseteq A$$
が成立する．

正しいことの証明：任意の集合 A, B を考える．
- $x \in A$ かつ $x \in B$ であると仮定する．
- (ここで,「$x \in A$ かつ $x \in B$」を用いて「$x \in A$」を証明する)
- したがって，$x \in A$ である．
- したがって，$A \cap B \subseteq A$ である． □

格言 (第 3 回講義より)

証明では「証明すること」と「用いる性質」を明確に区別する

例題 1：正しいことの証明

例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して，
$$A \cap B \subseteq A$$
が成立する．

正しいことの証明：任意の集合 A, B を考える．
- $x \in A$ かつ $x \in B$ であると仮定する．
- (ここで,「$x \in A$ かつ $x \in B$」を用いて「$x \in A$」を証明する)
- したがって，$x \in A$ である．
- したがって，$A \cap B \subseteq A$ である． □

整理
- 証明すること：「$x \in A$」
- 用いる性質：「$x \in A$」,「$x \in B$」

例題 1：正しいことの証明

例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して，
$$A \cap B \subseteq A$$
が成立する．

正しいことの証明：任意の集合 A, B を考える．
- $x \in A$ かつ $x \in B$ であると仮定する．
- 仮定より，$x \in A$ である．
- したがって，$A \cap B \subseteq A$ である． □

これで完了

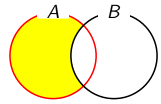
整理
- 証明すること：「$x \in A$」
- 用いる性質：「$x \in A$」,「$x \in B$」

例題 2

例題 2：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して，
$$(A \cup B) - B \subseteq A$$
が成立する．

オイラー図による直感



直感：正しそう

例題 2：正しいことの証明に向けて

例題 2：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して，
$$(A \cup B) - B \subseteq A$$
が成立する．

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法 (第 2 回講義より)

1. 「任意の〜を考える」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

例題 2：正しいことの証明

例題 2：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して，
$$(A \cup B) - B \subseteq A$$
が成立する．

正しいことの証明：任意の集合 A, B を考える．
- (ここで,「$(A \cup B) - B \subseteq A$」であることを証明する)
- したがって，$(A \cup B) - B \subseteq A$ である． □

次のステップ

「$(A \cup B) - B \subseteq A$」の証明

例題 2：正しいことの証明

次のステップ

「$(A \cup B) - B \subseteq A$」の証明

格言 (第 1 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

「$(A \cup B) - B \subseteq A$」を定義に立ち戻って書き換える

$x \in (A \cup B) - B$ ならば $x \in A$

さらに「$x \in (A \cup B) - B$」も書き換える

(($x \in A$ または $x \in B$) かつ $x \in B$ ではない) ならば $x \in A$

「〜ならば…である」という命題の証明法 (第 3 回講義より)

1. 「〜であると仮定する」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. 「〜である」という性質を用いて,「…である」を証明する

例題 2：正しいことの証明

例題 2：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して，
$$(A \cup B) - B \subseteq A$$
が成立する．

正しいことの証明：任意の集合 A, B を考える．
- 「$x \in A$ または $x \in B$」かつ「$x \in B$ ではない」と仮定する．
- (ここで，仮定を用いて「$x \in A$」を証明する)
- したがって，$x \in A$ である．
- したがって，$(A \cup B) - B \subseteq A$ である． □

格言 (第 3 回講義より)

証明では「証明すること」と「用いる性質」を明確に区別する

例題 2：正しいことの証明

例題 2：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して，

$$(A \cup B) - B \subseteq A$$

が成立する．

正しいことの証明：任意の集合 A, B を考える．

- 「$x \in A$ または $x \in B$」かつ「$x \in B$ ではない」と仮定する．
- (ここで，仮定を用いて「$x \in A$」を証明する)
- したがって，$x \in A$ である．
- したがって，$(A \cup B) - B \subseteq A$ である． □

整理

- 証明すること：「$x \in A$」
- 用いる性質：「$x \in A$ または $x \in B$」,「$x \in B$ ではない」

例題 2：推論の類型 (復習)

整理

- 証明すること：「$x \in A$」
- 用いる性質：「$x \in A$ または $x \in B$」,「$x \in B$ ではない」

今後出てくる証明にあること (第 3 回講義より)

- 証明で 用いる性質 が複雑になってくる
  - 用いる性質どうしを組み合わせて，用いる性質を導く (推論)
  - 用いる性質：仮定，または，仮定の下で正しいと分かっていること
- 証明で 示したい事項 が複雑になってくる
  - 示したいことを変更して，証明をしやすくする

例題 2：推論の類型 (選言三段論法)

整理

- 証明すること：「$x \in A$」
- 用いる性質：「$x \in A$ または $x \in B$」,「$x \in B$ ではない」

選言三段論法による推論

用いる性質

- 「〇〇または□□である」ことが正しい
- 「□□ではない」が正しい

このとき,「〇〇である」も正しい

つまり,

- 用いる性質：「$x \in A$ または $x \in B$」,「$x \in B$ ではない」

から「$x \in A$」が導かれる

例題 2：正しいことの証明

例題 2：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して，

$$(A \cup B) - B \subseteq A$$

が成立する．

正しいことの証明：任意の集合 A, B を考える．

- 「$x \in A$ または $x \in B$」かつ「$x \in B$ ではない」と仮定する．
- 仮定より，$x \in A$ である．
- したがって，$(A \cup B) - B \subseteq A$ である． □

これで証明は完了

注意

- 用いる推論類型が簡単ならば，それを書く必要はない

「何が簡単なのか」は主観によって判断される

例題 3

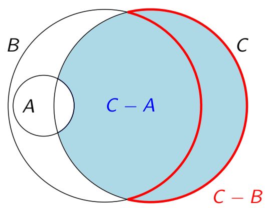
例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B, C に対して

$$A \subseteq B \text{ ならば } C - B \subseteq C - A$$

が成立する．

オイラー図による直感：仮定が成り立つ場合を描く



例題 3：正しいことの証明

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B, C に対して

$$A \subseteq B \text{ ならば } C - B \subseteq C - A$$

が成立する．

正しいことの証明：任意の集合 A, B, C を考える．

- (ここで,「$A \subseteq B$ ならば $C - B \subseteq C - A$」を証明する)
- したがって，$A \subseteq B$ ならば $C - B \subseteq C - A$ となる． □

例題 3：正しいことの証明

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B, C に対して

$$A \subseteq B \text{ ならば } C - B \subseteq C - A$$

が成立する．

正しいことの証明：任意の集合 A, B, C を考える．

- $A \subseteq B$ であると仮定する．
- (ここで，仮定を用いて，$C - B \subseteq C - A$」を証明する．)
- したがって，$C - B \subseteq C - A$ となる．
- したがって，$A \subseteq B$ ならば $C - B \subseteq C - A$ となる． □

整理

- 証明すること：「$C - B \subseteq C - A$」
- 用いる性質：「$A \subseteq B$」

例題 3：正しいことの証明

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B, C に対して

$$A \subseteq B \text{ ならば } C - B \subseteq C - A$$

が成立する．

正しいことの証明：任意の集合 A, B, C を考える．

- $A \subseteq B$ であると仮定する．
- (ここで，仮定を用いて，$C - B \subseteq C - A$」を証明する．)
- したがって，$C - B \subseteq C - A$ となる．
- したがって，$A \subseteq B$ ならば $C - B \subseteq C - A$ となる． □

整理

- 証明すること：「$x \in C - B$ ならば $x \in C - A$」
- 用いる性質：「$A \subseteq B$」

例題 3：正しいことの証明

正しいことの証明：任意の集合 A, B, C を考える．

- $A \subseteq B$ であると仮定する．
- $x \in C - B$ であると仮定する．
- （ここで，仮定を用いて「$x \in C - A$」を証明する．）
- したがって，$x \in C - A$ となる．
- したがって，$C - B \subseteq C - A$ となる．
- したがって，$A \subseteq B$ ならば $C - B \subseteq C - A$ となる． □

整理

- 証明すること：「$x \in C - A$」
- 用いる性質：「$A \subseteq B$」，「$x \in C - B$」

用いる性質をより詳しく見ていく

例題 3：推論

(1) $A \subseteq B$
(2) $x \in C - B$
(3) $x \in A$ ならば $x \in B$ ((1) より)
(4) $x \in C$ ((2) より)
(5) $x \in B$ ではない ((2) より)
(6) $x \in A$ ではない ((3) と (4) より)
(7) $x \in C - A$ ((3) と (5) より)

モードゥス・トレンスによる推論 (第 3 回講義より)

用いる性質

- 「〇〇ならば□□である」ことが正しい
- 「□□ではない」が正しい

このとき,「〇〇ではない」も正しい

例題 3：正しいことの証明 (完了)

正しいことの証明：任意の集合 A, B, C を考える．

- $A \subseteq B$ であると仮定する． ......(1)
- $x \in C - B$ であると仮定する． ......(2)
- (1) より，$x \in A$ ならば $x \in B$ である． ......(3)
- (2) より，$x \in C$ であり，かつ， ......(4)
  $x \in B$ ではない． ......(5)
- (3) と (5) より，$x \in A$ ではない． ......(6)
- (4) と (6) より，$x \in C - A$ となる．
- したがって，$C - B \subseteq C - A$ となる．
- したがって，$A \subseteq B$ ならば $C - B \subseteq C - A$ となる． □

これで証明が完了した．

目次

1 集合の包含関係に関する証明
例題 1
例題 2
例題 3
2 集合の包含関係に関する証明：空集合の扱い
例題 4
例題 5
3 今日のまとめ

空集合とは

空集合とは？ (復習)

要素を持たない集合を空集合と呼び,「$\emptyset$」または「$\varnothing$」と表記する

空集合とは?: 論理を用いて定義をすると

- $x \in \emptyset$ となる x は存在しない
- 任意の x に対して，$x \notin \emptyset$

例題 4：空集合は任意の集合の部分集合

任意の集合 A に対して

$$\emptyset \subseteq A$$

部分集合の定義に立ち戻って書き直すと

$$x \in \emptyset \text{ ならば } x \in A$$

例題 4：証明

例題 4：空集合は任意の集合の部分集合

任意の集合 A に対して

$$\emptyset \subseteq A$$

証明：任意の集合 A を考える．

- $x \in \emptyset$ であると仮定する． ......(1)
- しかし，空集合の定義より，$x \notin \emptyset$ である． ......(2)
- (1) と (2) は矛盾する．
- したがって，$x \in A$ である．
- したがって，$\emptyset \subseteq A$ となる． □

注意

これは「背理法による証明」の一種とも考えられるが,
背理法を使っているわけではない

例題 4：推論の類型

例題 4：空集合は任意の集合の部分集合

任意の集合 A に対して

$$\emptyset \subseteq A$$

証明：任意の集合 A を考える．

- $x \in \emptyset$ であると仮定する． ......(1)
- しかし，空集合の定義より，$x \notin \emptyset$ である． ......(2)
- (1) と (2) は矛盾する．
- したがって，$x \in A$ である．
- したがって，$\emptyset \subseteq A$ となる． □

「空ゆえに真」という推論

矛盾からは何を導いてもよい

例題 5

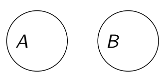
例題 5：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して

$$A \cap B = \emptyset \text{ ならば } A \subseteq A - B$$

が成り立つ．

オイラー図による直感



例題 5：正しいことの証明

例題 5：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して

$$A \cap B = \emptyset \text{ ならば } A \subseteq A - B$$

が成り立つ．

正しいことの証明：任意の集合 A, B を考える．

- (ここに,「$A \cap B = \emptyset$ ならば $A \subseteq A - B$」の証明を書く．)
- したがって，$A \cap B = \emptyset$ ならば $A \subseteq A - B$ である． □

例題 5：正しいことの証明

例題 5：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して

$$A \cap B = \emptyset \text{ ならば } A \subseteq A - B$$

が成り立つ．

正しいことの証明：任意の集合 A, B を考える．

- $A \cap B = \emptyset$ であると仮定する．
- (ここに $A \subseteq A - B$ であることの証明を書く．)
- したがって，$A \subseteq A - B$ である．
- したがって，$A \cap B = \emptyset$ ならば $A \subseteq A - B$ である． □

例題 5：正しいことの証明

例題 5：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して

$$A \cap B = \emptyset \text{ ならば } A \subseteq A - B$$

が成り立つ．

正しいことの証明：任意の集合 A, B を考える．

- $A \cap B = \emptyset$ であると仮定する．
- $x \in A$ であると仮定する．
- (ここに $x \in A - B$ であることの証明を書く．)
- したがって，$x \in A - B$ である．
- したがって，$A \subseteq A - B$ である．
- したがって，$A \cap B = \emptyset$ ならば $A \subseteq A - B$ である． □

例題 5：推論

(1) $A \cap B = \emptyset$
(2) $x \in A$
(3) $x \in A \cap B$ ではない　((1) より)
(4) ($x \in A$ かつ $x \in B$) ではない　((3) より)
(5) ($x \in A$ ではない) または ($x \in B$ ではない)　((4) より)
(6) $x \in B$ ではない　((2) と (5) より)
(7) $x \in A - B$　((2) と (6) より)

証明したいこと：$x \in A - B$

例題 5：正しいことの証明

正しいことの証明：任意の集合 A, B を考える．

- $A \cap B = \emptyset$ であると仮定する． .... (1)
- $x \in A$ であると仮定する． .... (2)
- (1) より，$x \in A \cap B$ ではない .... (3)
- (3) より,「$x \in A$ かつ $x \in B$」ではない .... (4)
- (4) より,「$x \in A$ ではない」または「$x \in B$ ではない」 .... (5)
- (2) と (5) より，$x \in B$ ではない .... (6)
- (2) と (6) より，$x \in A - B$ である．
- したがって，$A \subseteq A - B$ である．
- したがって，$A \cap B = \emptyset$ ならば $A \subseteq A - B$ である． □

これで証明は完了．

目次

1. 集合の包含関係に関する証明
   - 例題 1
   - 例題 2
   - 例題 3
2. 集合の包含関係に関する証明：空集合の扱い
   - 例題 4
   - 例題 5
3. 今日のまとめ

今日のまとめ

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

集合の包含関係に関する証明ができるようになる

- 推論の類型：選言三段論法
- 推論の類型：モードゥス・トレンス
- 推論の類型：空ゆえに真

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK