離散数学 第 5 回
集合の記法 (2)：直積と冪集合

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 5 月 20 日

最終更新：2014 年 5 月 19 日　10:57

中間試験

- 日時，場所
  - 6 月 10 日 (火) 第 6 限，A201 教室
- 出題範囲
  - 第 1 回 (4 月 8 日) の最初から 第 6 回 (5 月 27 日) の最後までの内容
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 3 題は演習問題として提示されたものと同一である
    - ただし，発展問題は出題しない
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 10 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

この日，この時間の都合がどうしても悪い場合

- 5/27 (火) の授業終了までに連絡

今日の概要

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

集合に関する用語を正しく使うことができるようになる

- 直積
- 冪集合

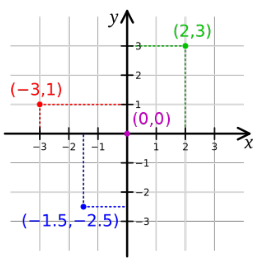
論理の復習と，それを用いた集合の同等性に関する証明

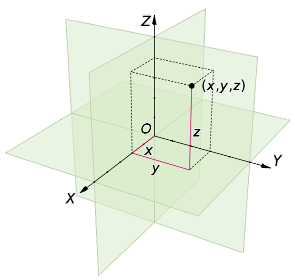
- 特に，分配法則とド・モルガンの法則

目次

座標

- 2 次元平面の点の座標は 2 つの実数を「対」にして表現する
- このように，集合の要素を「対」にすることは有用





http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

構造体

プログラムにおける構造体

```
struct account {
  string name;
  int account_number;
  int balance;
};
```

数個のデータを組にして，一つの構造を表現する

順序対 (2 個組)

順序対とは？ (常識に基づく定義)

順序対とは，ものを 2 つ並べたもののことである．

- a と a' をこの順で並べたものは「(a, a')」と表記する

「順序対」は単に「対」や「組」と呼ばれることもある

同じ順序対 (常識に基づく定義)

2 つの順序対 (a, a') と (b, b') が等しいことを $(a, a') = (b, b')$ と表記し，

$$a = b \text{ かつ } a' = b'$$

であることと定義する

注意：(a, a') と (a', a) は $a \neq a'$ ならば異なる

集合の直積 (1)

集合の直積

集合 A と集合 B の直積を $A \times B$ と表記して，

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in B\}$$

と定義する

「直積」は「デカルト積」とも呼ぶ

例

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ のとき，

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$

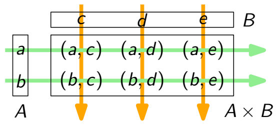
簡単な確認：$A \times B$ の要素数 $=$ (A の要素数) $\times$ (B の要素数)

集合の直積：図示

例

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ のとき，

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$



例 続き

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ のとき，

$$B \times A = \{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b), (e, a), (e, b)\}$$

n 個組

n は自然数

n 個組とは？ (常識に基づく定義)

n 個組とは，ものを n 個並べたもののことである．

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ をこの順で並べたものは「$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$」と表記する

同じ n 個組 (常識に基づく定義)

2 つの n 個組 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が等しいことを $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ と表記し，

$$\text{すべての } i \text{ に対して } a_i = b_i$$

であることと定義する

集合の直積 (2)

集合の直積

集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の直積を $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ と表記して，

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{すべての } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{に対して } x_i \in A_i \end{array} \right\}$$

と定義する

「$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$」を「$\prod_{i=1}^{n} A_i$」と書くこともある

例

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{f, g\}$ のとき，

$$\begin{aligned} A \times B \times C \;=\; & \{(a, c, f), (a, c, g), (a, d, f), (a, d, g), (a, e, f), (a, e, g), \\ & (b, c, f), (b, c, g), (b, d, f), (b, d, g), (b, e, f), (b, e, g)\} \end{aligned}$$

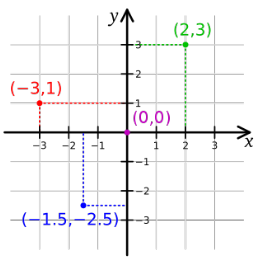
簡単な確認：$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ の要素数 $=$ (A_1 の要素数) $\times$ (A_2 の要素数) $\times \cdots \times$ (A_n の要素数)

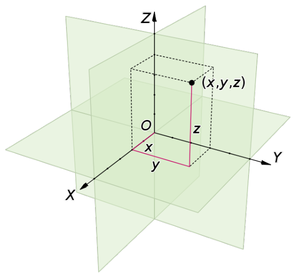
集合の直積 (関係する記法)

- $A \times A$ を A^2 と書く
- $A \times A \times A$ を A^3 と書く
- $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ 個}}$ を A^n と書く

集合の直積：例 1 (デカルト座標系)

- $\mathbb{R}^2 = 2$ 次元平面
- $\mathbb{R}^3 = 3$ 次元空間
- …





http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

集合の直積：例 2 (IP アドレス)

(IPv4 における) IP アドレスは 1 バイトの数 4 つで表現される

- www.uec.ac.jp: 130.153.9.10
- www.kantei.go.jp: 202.232.146.151

つまり，

$$\text{可能な IP アドレス全体の集合} = \{0, \ldots, 255\}^4$$

集合の直積：例 3 (DNA (デオキシリボ核酸))

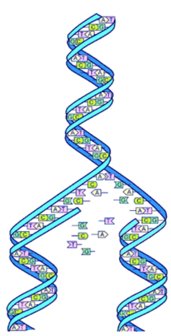
DNA は生物の遺伝情報を担う物質

- アデニン (A)，チミン (T)，シトシン (C)，グアニン (G) という塩基の並び方で遺伝情報はだいたい決められている

つまり，

- DNA が持つ遺伝情報全体の集合 $= \{A, T, C, G\}^n$

n は生物種によって異なる自然数



http://en.wikipedia.org/wiki/DNA_replication

集合の直積：補足

集合の直積 (再掲)

集合 A と集合 B の直積を $A \times B$ と表記して，

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in B\}$$

と定義する

定義から，次が分かる

- $A \times \emptyset = \emptyset$
  - $x \in A$ かつ $y \in \emptyset$ となる (x, y) は存在しない
- $\emptyset \times B = \emptyset$
  - $x \in \emptyset$ かつ $y \in B$ となる (x, y) は存在しない

目次

冪集合

冪集合

集合 A の冪集合とは A の部分集合全体から成る集合であり，2^A と表記する．

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

- 「冪集合」の他に「巾集合」,「べき集合」,「ベキ集合」とも書く
- 「2^A」の他に「$\mathcal{P}(A)$」,「$\mathscr{P}(A)$」とも書く
- 冪集合の要素は集合 (冪集合は集合の集合)

例

$A = \{a, b, c\}$ のとき

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

簡単な確認：2^A の要素数 $= 2^{A \text{ の要素数}}$

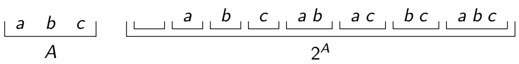
冪集合：例とイメージ

例

$A = \{a, b, c\}$ のとき

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

イメージ (箱による)



冪集合：他の例

冪集合 (再掲)

集合 A の冪集合とは A の部分集合全体から成る集合であり，2^A と表記する．

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

- $2^{\{a\}} = \{\emptyset, \{a\}\}$
- $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$
- $2^{\{\emptyset\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

目次

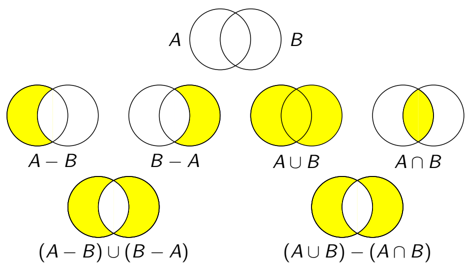
集合の同等性：例題 1

例題 1：次を証明せよ

任意の集合 A, B に対して

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

オイラー図による直感



集合の同等性：例題 1 (証明すべきことの確認 1)

例題 1：次を証明せよ

任意の集合 A, B に対して

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

格言 (第 1 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

集合 X, Y に対して，$X = Y$ であることの定義は？

$X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq X$

集合 X, Y に対して，$X \subseteq Y$ であることの定義は？

$x \in X$ ならば $x \in Y$

つまり，$X = Y$ であることは次と同値

$$x \in X \Leftrightarrow x \in Y$$

集合の同等性：例題 1 (証明すべきことの確認 2)

例題 1：次を証明せよ

任意の集合 A, B に対して

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

格言 (第 1 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

つまり証明すべきことは

$$x \in (A - B) \cup (B - A) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) - (A \cap B)$$

集合の同等性：例題 1 (定義に立ち戻って書き換える：左辺)

- $(A-B)\cup(B-A)=\{x \mid x\in A-B$ または $x\in B-A\}$ なので，

$$x\in(A-B)\cup(B-A)\Leftrightarrow x\in A-B \text{ または } x\in B-A.$$

- $A-B=\{x \mid x\in A$ かつ $x\notin B\}$, $B-A=\{x \mid x\in B$ かつ $x\notin A\}$ なので，

$$\begin{aligned} x\in A-B &\Leftrightarrow (x\in A) \text{ かつ } (x\in B \text{ ではない}),\\ x\in B-A &\Leftrightarrow (x\in B) \text{ かつ } (x\in A \text{ ではない}). \end{aligned}$$

- つまり，

$$\begin{aligned} x\in(A-B)\cup(B-A) \Leftrightarrow\ & ((x\in A) \text{ かつ } (x\in B \text{ ではない}))\\ & \text{または}\\ & ((x\in B) \text{ かつ } (x\in A \text{ ではない})). \end{aligned}$$

集合の同等性：例題 1 (定義に立ち戻って書き換える：右辺)

- $(A\cup B)-(A\cap B)=\{x \mid x\in A\cup B$ かつ $x\notin A\cap B\}$ なので，

$$x\in(A\cup B)-(A\cap B) \Leftrightarrow (x\in A\cup B) \text{ かつ } (x\in A\cap B \text{ ではない}).$$

- $A\cup B=\{x \mid x\in A$ または $x\in B\}$, $A\cap B=\{x \mid x\in A$ かつ $x\in B\}$ なので，

$$\begin{aligned} x\in A\cup B &\Leftrightarrow x\in A \text{ または } x\in B,\\ x\in A\cap B &\Leftrightarrow x\in A \text{ かつ } x\in B. \end{aligned}$$

- つまり，

$$\begin{aligned} x\in(A\cup B)-(A\cap B) \Leftrightarrow\ & (x\in A \text{ または } x\in B)\\ & \text{かつ}\\ & ((x\in A \text{ かつ } x\in B) \text{ ではない}) \end{aligned}$$

集合の同等性：例題 1 (ここまでのまとめ)

例題 1：次を証明せよ

任意の集合 A, B に対して

$$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$$

証明すべきこと

$$x\in(A-B)\cup(B-A)\Leftrightarrow x\in(A\cup B)-(A\cap B)$$

$x\in(A-B)\cup(B-A)$ は次と同値

$((x\in A)$ かつ $(x\in B$ ではない$))$ または
$((x\in B)$ かつ $(x\in A$ ではない$))$

$x\in(A\cup B)-(A\cap B)$ は次と同値

$(x\in A$ または $x\in B)$ かつ $((x\in A$ かつ $x\in B)$ ではない$)$

論理回路学の復習 (1)

格言

証明は論理に基づいて行われる

命題論理における重要な同値性の復習

冪等法則

$$P \text{ かつ } P\Leftrightarrow P$$
$$P \text{ または } P\Leftrightarrow P$$

交換法則

$$P \text{ かつ } Q\Leftrightarrow Q \text{ かつ } P$$
$$P \text{ または } Q\Leftrightarrow Q \text{ または } P$$

定数の除去・導入

$$P \text{ かつ 真}\Leftrightarrow P$$
$$P \text{ または 偽}\Leftrightarrow P$$

変数の除去・導入

$$P \text{ かつ 偽}\Leftrightarrow \text{偽}$$
$$P \text{ または 真}\Leftrightarrow \text{真}$$

排中法則

$$P \text{ または } (P \text{ ではない})\Leftrightarrow \text{真}$$

矛盾法則

$$P \text{ かつ } (P \text{ ではない})\Leftrightarrow \text{偽}$$

論理回路学の復習 (2)

分配法則

$$(P \text{ または } Q) \text{ かつ } R\Leftrightarrow(P \text{ かつ } R) \text{ または } (Q \text{ かつ } R)$$
$$(P \text{ かつ } Q) \text{ または } R\Leftrightarrow(P \text{ または } R) \text{ かつ } (Q \text{ または } R)$$

結合法則

$$(P \text{ かつ } Q) \text{ かつ } R\Leftrightarrow P \text{ かつ } (Q \text{ かつ } R)$$
$$(P \text{ または } Q) \text{ または } R\Leftrightarrow P \text{ または } (Q \text{ または } R)$$

ド・モルガンの法則 (注意)

$$((P \text{ または } Q) \text{ ではない})\Leftrightarrow((P \text{ ではない}) \text{ かつ } (Q \text{ ではない}))$$
$$((P \text{ かつ } Q) \text{ ではない})\Leftrightarrow((P \text{ ではない}) \text{ または } (Q \text{ ではない}))$$

集合の同等性：例題 1 (証明の完成)

$x\in(A\cup B)-(A\cap B)$

$\Leftrightarrow$ $(x\in A$ または $x\in B)$ かつ $((x\in A$ かつ $x\in B)$ ではない$)$

$\Leftrightarrow$ $(x\in A$ または $x\in B)$ かつ
$((x\in A$ ではない$)$ または $(x\in B$ ではない$))$ (ド・モルガンの法則)

$\Leftrightarrow$ $(x\in A$ かつ $((x\in A$ ではない$)$ または $(x\in B$ ではない$)))$ または
$(x\in B$ かつ $((x\in A$ ではない$)$ または $(x\in B$ ではない$)))$
(分配法則)

$\Leftrightarrow$ $(x\in A$ かつ $(x\in A$ ではない$))$ または
$(x\in A$ かつ $(x\in B$ ではない$))$ または
$(x\in B$ かつ $(x\in A$ ではない$))$ または
$(x\in B$ かつ $(x\in B$ ではない$))$ (分配法則，交換法則，結合法則)

集合の同等性：例題 1 (証明の完成 (続き))

$\Leftrightarrow$ $(x\in A$ かつ $(x\in A$ ではない$))$ または
$(x\in A$ かつ $(x\in B$ ではない$))$ または
$(x\in B$ かつ $(x\in A$ ではない$))$ または
$(x\in B$ かつ $(x\in B$ ではない$))$

$\Leftrightarrow$ 偽 または $(x\in A$ かつ $(x\in B$ ではない$))$ または
$(x\in B$ かつ $(x\in A$ ではない$))$ または 偽 (矛盾法則)

$\Leftrightarrow$ $(x\in A$ かつ $(x\in B$ ではない$))$ または
$(x\in B$ かつ $(x\in A$ ではない$))$ (定数の除去，交換法則)

$\Leftrightarrow$ $x\in(A-B)\cup(B-A)$ □

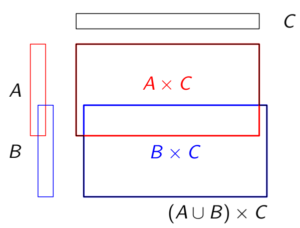
集合の同等性：例題 2

例題 2：次を証明せよ

任意の集合 A, B, C に対して

$$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$$

図による直感



集合の同等性：例題 2

例題 2：次を証明せよ

任意の集合 A, B, C に対して

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

格言 (第 1 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

証明すべきことは

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$$

集合の同等性：例題 2 (定義に立ち戻って書き換える：左辺)

- $(A \cup B) \times C = \{(x, y) \mid x \in A \cup B$ かつ $y \in C\}$ なので，

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ かつ } y \in C.$$

- $A \cup B = \{x \mid x \in A$ または $x \in B\}$ なので，

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ または } x \in B.$$

- つまり，

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \text{ または } x \in B) \text{ かつ } y \in C.$$

集合の同等性：例題 2 (定義に立ち戻って書き換える：右辺)

- $(A \times C) \cup (B \times C) = \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times C$ または $(x, y) \in B \times C\}$ なので，

$$(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in A \times C \text{ または } (x, y) \in B \times C.$$

- $A \times C = \{(x, y) \mid x \in A$ かつ $y \in C\}$ なので，

$$(x, y) \in A \times C \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ かつ } y \in C.$$

- $B \times C = \{(x, y) \mid x \in B$ かつ $y \in C\}$ なので，

$$(x, y) \in B \times C \quad \Leftrightarrow \quad x \in B \text{ かつ } y \in C.$$

- つまり，

$$\begin{aligned}(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C) \quad \Leftrightarrow \quad & (x \in A \text{ かつ } y \in C) \text{ または} \\ & (x \in B \text{ かつ } y \in C).\end{aligned}$$

集合の同等性：例題 2 (証明の完成)

$$\begin{aligned}& (x, y) \in (A \cup B) \times C \\ \Leftrightarrow\ & (x \in A \text{ または } x \in B) \text{ かつ } y \in C \\ \Leftrightarrow\ & (x \in A \text{ かつ } y \in C) \text{ または } (x \in B \text{ かつ } y \in C) && \text{(分配法則)} \\ \Leftrightarrow\ & (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C) && \square\end{aligned}$$

目次

今日のまとめ

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

集合に関する用語を正しく使うことができるようになる

- 直積
- 冪集合

論理の復習と，それを用いた集合の同等性に関する証明

- 特に，分配法則とド・モルガンの法則

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK