離散数学 第 4 回
集合の記法 (1)：外延的記法と内包的記法

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 5 月 13 日

最終更新：2014 年 5 月 12 日　09:28

中間試験

- 日時，場所
  - 6 月 10 日 (火) 第 6 限，A201 教室
- 出題範囲
  - 第 1 回 (4 月 8 日) の最初から 第 6 回 (5 月 27 日) の最後までの内容
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 3 題は演習問題として提示されたものと同一である
    - ただし，発展問題は出題しない
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 10 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

参考：成績

- $\min\{100,$ 中間試験の素点 $+$ 期末試験の素点 $\}$

概要 (シラバス掲載内容)

主題

- 理工学のあらゆる分野に現れる数学の言葉と論理を徹底的に身につける
- これによって，論理的な思考を行う基礎能力を体得し，将来的に，専門書を読み解き，自分で学術的な文書を書くことができるようにする
- キャッチフレーズは「語学としての数学」

達成目標

以下の 2 項目をすべて達成することを目標とする．

1. 数学における基本的な用語 (集合，論理，関数，関係) を正しく使うことができる
2. 数学における基本的な証明を正しく行うことができる

今日の概要

今日の目標

集合に関する用語を正しく使うことができるようになる

- 集合の記述法 (外延的定義，内包的定義)
- 集合の演算 (共通部分，合併，差)
- 集合の包含関係

集合の包含関係に関する証明ができるようになる

- この続きは次々回にも扱う

目次

集合

集合 (常識に基づく定義)

集合とはものの集まり

集合の記法

波かっこ 「{」と「}」を使って記述する

例：

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- { あ, い, う, え, お }

集合の要素とは？

集合を構成する 1 つ 1 つのものを要素または元と呼ぶ

格言

数学理解の基本は「定義」と「記法」の理解

要素であることの記法

記法

- x が集合 A の要素であることを次のように表記する

$$x \in A$$

- x が集合 A の要素ではないことを次のように表記する

$$x \notin A$$

例：$A = \{$ あ, い, う, え, お $\}$ とすると

- あ $\in A$
- ま $\notin A$
- お $\in A$
- う $\in A$

集合の記述法 (1)：要素を並べる

$U = \{$ アメリカ, イギリス, イタリア, オーストリア, オーストラリア, オランダ, カナダ, 韓国, ギリシャ, スウェーデン, スイス, スペイン, ソ連, 中国, ドイツ, 西ドイツ, 日本, ノルウェー, フィンランド, フランス, ベルギー, メキシコ, ユーゴスラビア, ロシア $\}$

集合の「外延的定義」と呼ばれる

注

集合に対して「$=$」が何を意味するのかは後で紹介する

集合の記述法 (2)：性質を定める

$$U = \{x \mid x \text{ は (2014 年までに) 近代オリンピックが開催された国 }\}$$

記法

「$\{x \mid x$ がこの集合の要素であるための (必要十分) 条件 $\}$」

「 $|$ 」の代わりに「 : 」や「 ; 」を使うこともある

集合の「内包的定義」と呼ばれる

集合の記述法：他の例

$$\begin{aligned} A &= \{2,3,5,7\} \\ &= \{7,2,5,3\} \quad \text{←並べる順番が違っても集合としては同じ} \\ &= \{n \mid n \text{ は 10 以下の素数である }\} \\ &= \left\{ n \;\middle|\; \begin{array}{l} n \text{ は整数であり，かつ，} \\ n^4 - 17n^3 + 101n^2 - 247n + 210 = 0 \text{ を満たす} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

外延的定義の利点・欠点

利点
- 何が要素か分かりやすい

欠点
- 全要素を並べる必要がある
- 全要素を並べられないかも
- 集合の性質が分かりにくい

内包的定義の利点・欠点

利点
- 集合の性質が分かりやすい
- 全要素を並べなくてもよい

欠点
- 何が要素か分かりにくい
- よく書き違える (要努力！)

集合の記述法：他の例 2

$$\begin{aligned} B &= \{n^2 \mid n \text{ は 10 以下の素数である }\} \\ &= \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} \\ &= \{4, 9, 25, 49\} \\ C &= \{m - n \mid m \text{ と } n \text{ は 10 以下の素数である }\} \\ &= \{2-2, 2-3, 2-5, 2-7, 3-2, 3-3, 3-5, 3-7, \\ &\quad 5-2, 5-3, 5-5, 5-7, 7-2, 7-3, 7-5, 7-7\} \\ &= \{0, -1, -3, -5, 1, 0, -2, -4, 3, 2, 0, -2, 5, 4, 2, 0\} \\ &= \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

よく出てくる (無限) 集合

表記法

- $\mathbb{N}$ = すべての自然数からなる集合 (自然数全体)
- $\mathbb{Z}$ = すべての整数からなる集合 (整数全体)
- $\mathbb{Q}$ = すべての有理数からなる集合 (有理数全体)
- $\mathbb{R}$ = すべての実数からなる集合 (実数全体)
- $\mathbb{C}$ = すべての複素数からなる集合 (複素数全体)

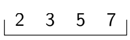
例：

- $2 \in \mathbb{N}$
- $-3 \notin \mathbb{N}$
- $-3 \in \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
- $1 + \sqrt{2}i \notin \mathbb{R}$
- $1 + \sqrt{2}i \in \mathbb{C}$

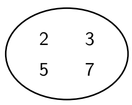
集合に対するイメージを持つ

集合 $\{2,3,5,7\}$

1. 波カッコは箱



2. 波カッコは境界



オイラー図と呼ばれる

目次

共通部分

共通部分とは？

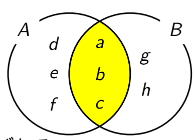
集合 A, B の共通部分を $A \cap B$ と表記し，

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

で定義する

例：
- $A = \{a,b,c,d,e,f\}$
- $B = \{a,b,c,g,h\}$ のとき，
- $A \cap B = \{a,b,c\}$

オイラー図



「共通部分」は「積集合」,「交わり」とも呼ばれる

合併

合併とは？

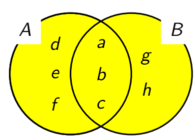
集合 A, B の合併を $A \cup B$ と表記し，

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

で定義する

例：
- $A = \{a,b,c,d,e,f\}$
- $B = \{a,b,c,g,h\}$ のとき，
- $A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

オイラー図



「合併」は「和集合」,「結び」とも呼ばれる

差集合

差集合とは？

集合 A, B に対して，差集合 $A - B$ を

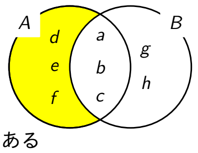
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

で定義する

例：

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, g, h\}$ のとき，
- $A - B = \{d, e, f\}$

オイラー図



「$A - B$」の代わりに「$A \setminus B$」と書くこともある

空集合

空集合とは？

要素を持たない集合を空集合と呼び,「$\emptyset$」または「$\varnothing$」と表記する

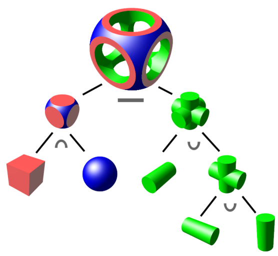
注 1：空集合は「{ }」とも書く

注 2：空集合の記号「$\emptyset$」と「$\varnothing$」はギリシャ文字「Φ」,「ϕ」と違う

集合の演算の応用例：Constructive Solid Geometry

Constructive Solid Geometry

単純な物体に対して集合演算を適用することで，複雑な物体を表現する
コンピュータ・グラフィクスの技法



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Csg_tree.png

目次

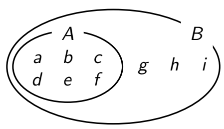
部分集合：直感

次の 2 つの集合を考える

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

A は B の部分集合

オイラー図による直感



部分集合とは？ (直感)

集合 A が集合 B の部分集合であるとは，
A が B に含まれている (包含されている) こと

「含まれている」とは？ 論理を使って書くことを考える

部分集合：定義

部分集合とは？ (論理を使った定義)

A が B の部分集合であるとは，

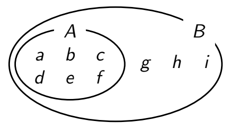
$$x \in A \quad \text{ならば} \quad x \in B$$

次の 2 つの集合を考える

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

A は B の部分集合

オイラー図による直感



部分集合の表記法

A が B の部分集合であることを「$A \subseteq B$」と表記する

「$A \subset B$」や「$A \subseteqq B$」と表記することもある

例

表記法：復習

- $\mathbb{N}$ = すべての自然数からなる集合
- $\mathbb{Z}$ = すべての整数からなる集合
- $\mathbb{Q}$ = すべての有理数からなる集合
- $\mathbb{R}$ = すべての実数からなる集合
- $\mathbb{C}$ = すべての複素数からなる集合

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

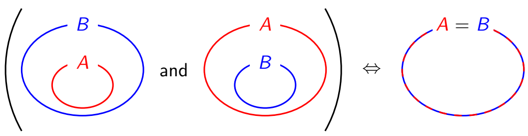
同じ集合

同じ集合

2 つの集合 A と B が同じであることを

$$A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq A$$

が成り立つことと定義し,「$A = B$」と表記する



目次

例題 1

例題 1：次の命題は正しいか？

集合 $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{2, 3, 4\}$ に対して，$A \subseteq B$ である

格言 (第 1 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

定義に立ち戻って，命題を書き直す

$x \in \{1, 2, 3\}$ ならば $x \in \{2, 3, 4\}$

「〜ならば…である」という命題が正しいか，正しくないか

正しい場合

- 前回のように証明する (次々回に再度説明)

正しくない場合

- 「〜」を満たすが「…」とならないものを見つける (反例を挙げる)

例題 1 (続)

例題 1：次の命題は正しいか？

集合 $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{2, 3, 4\}$ に対して，$A \subseteq B$ である

証明：正しくない．

- それは，$1 \in A$ であるが，$1 \notin B$ であるからである．　□

例題 2

例題 2：次の命題は正しいか？

任意の集合 A, B に対して，$A \cup B \subseteq A \cap B$ である

命題の否定

ある集合 A, B に対して，$A \cup B \subseteq A \cap B$ とならない

命題の否定を定義に立ち戻って書き直したもの

ある集合 A, B に対して,「$x \in A \cup B$ ならば $x \in A \cap B$」とならない

「〜が存在する」という命題の証明法

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)．

例題 2 (続)

例題 2：次の命題は正しいか？

任意の集合 A, B に対して，$A \cup B \subseteq A \cap B$ である

証明：正しくない．その理由は以下の通りである．

- $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$ を考える．
- このとき，$A \cup B = \{1, 2, 3\}$，$A \cap B = \{2\}$ であるので，$1 \in A \cup B$，$1 \notin A \cap B$ となる．
- したがって，$A \cup B \subseteq A \cap B$ とならない．　□

命題の否定を定義に立ち戻って書き直したもの

ある集合 A, B に対して,「$x \in A \cup B$ ならば $x \in A \cap B$」とならない

「〜が存在する」という命題の証明法

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)．

目次

今日のまとめ

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

集合に関する用語を正しく使うことができるようになる

- 集合の記述法 (外延的定義，内包的定義)
- 集合の演算 (共通部分，合併，差)
- 集合の包含関係

集合の包含関係に関する証明ができるようになる

- この続きは次々回にも扱う

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK