離散数学 第 3 回
証明法 (3)：「〜ならば…である」ことの証明

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 4 月 22 日

最終更新：2014 年 4 月 23 日　09:51

今日の概要

今日の目標

- 「〜ならば…である」という命題の意味を理解する
- 「〜ならば…である」という命題の証明ができるようになる
- 対偶による証明，背理法を理解して，
それを用いた証明ができるようになる

目次

「〜ならば…である」という命題の例

干支：子・丑・寅・卯・辰・巳・午・未・申・酉・戌・亥
- 2014 年が午年ならば，2015 年は未年である．　(真)
- 2014 年が午年ならば，2015 年は酉年である．　(偽)
- 2014 年が辰年ならば，2015 年は巳年である．　(真)

注意：「〜」と「…」も命題でなければならない

「〜ならば…である」という命題の意味

「〜」が正しいと仮定したとき，「…」も正しい

注意：
- 「〜」が正しくないときは考えない
- 「〜」が正しいか正しくないかは考えない

「〜ならば…である」という命題：真偽の定め方

真理値表と呼ばれる表現

〜	…	〜ならば…である
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	真
偽	偽	真

「2014 年が午年である」という事前知識の下では
- 2014 年が午年ならば，2015 年は未年である．　(真)
- 2014 年が午年ならば，2015 年は酉年である．　(偽)
- 2014 年が辰年ならば，2015 年は巳年である．　(真)
- 2014 年が辰年ならば，2015 年は未年である．　(真)

「〜ならば…である」という命題：真偽の定め方

真理値表と呼ばれる表現

〜	…	〜ならば…である
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	真
偽	偽	真

理解するための例をもう 1 つ

- 「コインを投げて表が出たら，100 円もらえる」という遊びを考える
- 実際に遊んで，このルールが守られたかどうかを考える

表が出て，100 円もらった	ルールは守られた
表が出て，100 円もらえなかった	ルールは守られなかった
表が出なくて，100 円もらった	ルールは守られた
表が出なくて，100 円もらえなかった	ルールは守られた

必要条件と十分条件

必要条件，十分条件とは？

「〜ならば…である」という命題が正しいとき，
- 「〜」は「…」が成り立つための十分条件であるといい
- 「…」は「〜」が成り立つための必要条件であるという

このとき，「〜 $\Rightarrow$ …」という記号を使うこともある

次の表現の意味はすべて同じ
- 2014 年が午年ならば，2015 年は未年である．
- 2014 年が午年であるとき，2015 年は未年である．
- 2014 年が午年であることは，2015 年が未年であるための十分条件である．
- 2015 年が未年であることは，2014 年が午年であるための必要条件である．
- 2015 年が未年であるのは，2014 年が午年であるときに限る．
- 2014 年が午年である $\Rightarrow$ 2015 年が未年である．
- 2015 年が未年である $\Leftarrow$ 2014 年が午年である．

必要十分条件

必要十分条件とは？

「〜ならば…である」と「…ならば〜である」がどちらも正しいとき，
- 「〜」は「…」が成り立つための必要十分条件であるという

このとき，「〜 $\Leftrightarrow$ …」という記号を使うこともある

次の表現の意味はすべて同じ
- 2014 年が午年であることは，2015 年が未年であるための必要十分条件である．
- 2014 年が午年であることと 2015 年が未年であることは同値である．
- 2014 年が午年であることと 2015 年が未年であることは等価である．
- 2014 年が午年であるとき，そのときに限り，2015 年は未年である．
- 2014 年が午年である $\Leftrightarrow$ 2015 年が未年である．

目次

「〜ならば…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

実数 x が $x > 3$ を満たすとき，$x^2 > 9$ が成り立つ

文の構造：$x > 3$ ならば $x^2 > 9$

「〜ならば…である」という命題の証明法

1. 「〜であると仮定する」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. 「〜である」という性質を用いて,「…である」を証明する

「〜ならば…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

実数 x が $x > 3$ を満たすとき，$x^2 > 9$ が成り立つ

証明：実数 x が $x > 3$ を満たすと仮定する.
- 実数 x が $x > 3$ を満たすので，両辺を 2 乗すると，$x^2 > 9$ が得られる
- したがって，$x^2 > 9$ が成り立つ. □

整理
- 証明すること：「$x^2 > 9$」
- 用いる性質：「x は実数である」,「$x > 3$ である」

格言

証明では「証明すること」と「用いる性質」を明確に区別する

「〜ならば…である」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

実数 x が $x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たすとき，$x = 1$ または $x = 2$ が成り立つ

「〜ならば…である」という命題の証明法

1. 「〜であると仮定する」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. 「〜である」という性質を用いて,「…である」を証明する

「〜ならば…である」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

実数 x が $x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たすとき，$x = 1$ または $x = 2$ が成り立つ

証明：実数 x が $x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たすと仮定する.
- $x^2 - 3x + 2 = 0$ なので，$(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2 = 0$ となる.
- x は実数なので，$x - 1 = 0$ または $x - 2 = 0$ となる.
- したがって，$x = 1$ または $x = 2$ となる. □

整理
- 証明すること：「$x = 1$ または $x = 2$」
- 用いる性質：「x は実数である」,「$x^2 - 3x + 2 = 0$ である」

「〜ならば…である」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

実数 x が $x^2 > 9$ を満たすとき，$x > 3$ が成り立つ

「〜ならば…である」という命題が正しいか，正しくないか

正しい場合
- 先ほどのように証明する

正しくない場合
- 「〜」を満たすが「…」とならないものを見つける (反例を挙げる)

「〜ならば…である」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

実数 x が $x^2 > 9$ を満たすとき，$x > 3$ が成り立つ

解答：これは正しくない．理由は以下の通りである.
- 実数 $x = -4$ を考える.
- このとき，$x^2 = 16 > 9$ であるが，$x > 3$ ではない. □

「〜ならば…である」という命題が正しいか，正しくないか

正しい場合
- 先ほどのように証明する

正しくない場合
- 「〜」を満たすが「…」とならないものを見つける (反例を挙げる)

例題 4

例題 4

実数 x と y に対して，次の 2 つが同値であることを証明せよ

(1) $xy = 1$ である.

(2) 0 ではないある実数 t が存在して，$x = t$ かつ $y = 1/t$ である.

「〜と…が同値である」ことの証明法

1. 「〜ならば…である」ことを証明する
2. 「…ならば〜である」ことを証明する

例題 4

例題 4

実数 x と y に対して，次の 2 つが同値であることを証明せよ

(1) $xy = 1$ である．

(2) 0 ではないある実数 t が存在して，$x = t$ かつ $y = 1/t$ である．

証明：まず，(1) ならば (2) であることを証明する．

- $xy = 1$ であると仮定する．
- このとき，$x \neq 0$ である．
- 実数 t を $t = x$ とする．
- このとき，$y = 1/x = 1/t$ となる．
- したがって，0 でないある実数 t が存在して，$x = t$ かつ $y = 1/t$ となる．

例題 4

例題 4

実数 x と y に対して，次の 2 つが同値であることを証明せよ

(1) $xy = 1$ である．

(2) 0 ではないある実数 t が存在して，$x = t$ かつ $y = 1/t$ である．

証明 (続)：次に，(2) ならば (1) であることを証明する．

- 0 ではないある実数 t が存在して，$x = t$ かつ $y = 1/t$ であることを仮定する．
- このとき，$xy = t \cdot (1/t) = 1$ となる．
- したがって，$xy = 1$ である． □

目次

推論の類型と証明法

「〜ならば…である」という命題の証明法 (再掲)

1 「〜であると仮定する」で始め,「したがって，…である」で終わる

2 「〜である」という性質を用いて,「…である」を証明する

今後出てくる証明にあること

- 証明で 使える性質 が複雑になってくる
  - 使える性質どうしを組み合わせて，使える性質を導く (推論)
  - 使える性質：仮定，または，仮定の下で正しいと分かっていること
- 証明で 示したい事項 が複雑になってくる
  - 示したいことを変更して，証明をしやすくする

$\leadsto$ そのような「変形法」を事前に説明

モードゥス・ポネンス

モードゥス・ポネンスによる推論

使える性質

- 「○○ならば□□である」ことが正しい
- 「○○」が正しい

このとき,「□□」も正しい

例：次の 2 つは正しい

- 2014 年が午年であるとき，2015 年は未年である
- 2014 年は午年である

この 2 つから,「2015 年は未年である」ことは正しいことが分かる

モードゥス・トレンス

モードゥス・トレンスによる推論

使える性質

- 「○○ならば□□である」ことが正しい
- 「□□ではない」が正しい

このとき,「○○ではない」も正しい

例：次の 2 つは正しい

- 2014 年が辰年であるとき，2015 年は巳年である
- 2015 年は巳年ではない

この 2 つから,「2014 年は辰年でない」ということが正しいと分かる

矛盾

矛盾による推論

使える性質

- 「○○である」が正しい
- 「○○ではない」が正しい

この 2 つから，矛盾が導かれる

矛盾が導かれるとよいことがある場合がある

証明法 (1)：対偶による証明

対偶による証明

「○○ならば□□である」を証明する代わりに
「□□でないならば○○ではない」を証明する

- 「○○ならば□□である」と
  「□□でないならば○○ではない」は同値

例：次の 2 つは同値

- 2014 年が辰年であるならば，2015 年は巳年である
- 2015 年が巳年でないならば，2014 年は辰年ではない

用語

「□□でないならば○○ではない」は「○○ならば□□である」の対偶

証明法 (2)：背理法

背理法による証明

「〇〇ならば□□である」を証明する代わりに
「〇〇であるが□□ではないとき，矛盾が導かれる」を証明する

例：次の 2 つは同値

- 2014 年が午年であるとき，2015 年は未年である
- 2014 年が午年であるが 2015 年が未年でないとき，矛盾が導かれる

対偶による証明：例題

例題：次を証明せよ

実数 a, b を考える．
任意の正実数 ϵ に対して $a < b + \epsilon$ が成り立つならば
$a \leq b$ が成り立つ

対偶による証明

「〇〇ならば□□である」を証明する代わりに
「□□でないならば〇〇ではない」を証明する

対偶による証明：例題

例題：次を証明せよ

実数 a, b を考える．
任意の正実数 ϵ に対して $a < b + \epsilon$ が成り立つならば
$a \leq b$ が成り立つ

証明：対偶による証明を行う (←これを書くと分かりやすい)

- すなわち，証明することは「$a > b$ ならば，ある正実数 ϵ が存在して $a \geq b + \epsilon$ となる」ことである． (←これを書くと分かりやすい)
- $a > b$ であると仮定する．
- $\epsilon = \dfrac{a-b}{2}$ とおく．
- $a > b$ より，$\epsilon > 0$ である．
- また，$b + \epsilon = b + \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2} < \dfrac{a+a}{2} = a$.
- したがって，ある正実数 ϵ が存在して $a \geq b + \epsilon$ となる． □

背理法による証明：例題

例題：次を証明せよ

実数 a, b を考える．
任意の正実数 ϵ に対して $a < b + \epsilon$ が成り立つならば
$a \leq b$ が成り立つ

背理法による証明

「〇〇ならば□□である」を証明する代わりに
「〇〇であるが□□ではないとき，矛盾が導かれる」を証明する

背理法による証明：例題

例題：次を証明せよ

実数 a, b を考える．
任意の正実数 ϵ に対して $a < b + \epsilon$ が成り立つならば
$a \leq b$ が成り立つ

証明：背理法による証明を行う． (←これを書くと分かりやすい)

- 任意の正実数 ϵ に対して $a < b + \epsilon$ が成り立つ，かつ $a > b$ が成り立つと仮定する．
- このとき，$b + \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2} < \dfrac{a+a}{2} = a$ となり，
すなわち，$b + \dfrac{a-b}{2} < a$ が成り立つ．
- また，$a > b$ より $\dfrac{a-b}{2} > 0$ である．
- これは，任意の正実数 ϵ に対して $a < b + \epsilon$ が成り立つことに矛盾する． □

目次

今日のまとめ

この講義の目標：復習

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 「〜ならば…である」という命題の意味を理解する
- 「〜ならば…である」という命題の証明ができるようになる
- 対偶による証明，背理法を理解して，
それを用いた証明ができるようになる

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK