離散数学 第 2 回
証明法 (2) :「任意の〜に対して…である」ことの証明

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 4 月 15 日

最終更新：2014 年 4 月 16 日　11:30

今日の概要

今日の目標

- 命題の否定が作れるようになる (前回の復習を兼ねて)
- 「任意の〜に対して…である」という命題の証明ができるようになる
- 反例による証明ができるようになる
- 「任意の〜に対して」,「ある〜が存在して」が連なる命題の証明ができるようになる

目次

「任意の〜に対して…である」という命題の例

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.81	785,873	徳島市
香川県	1,876.58	995,779	高松市
愛媛県	5,678.51	1,430,957	松山市
高知県	7,105.20	764,596	高知市

- 任意の四国の県に対して，その面積は 1,000km^2 以上である
- 任意の四国の県に対して，その人口は 100 万人以上である

「任意の〜に対して…である」の表現法

- 任意の四国の県に対して，その人口は 100 万人以上である
- どの四国の県に対しても，その人口は 100 万人以上である
- すべての四国の県に対して，その人口は 100 万人以上である
- 任意の四国の県の人口は 100 万人以上である
- どの四国の県の人口も 100 万人以上である
- すべての四国の県の人口は 100 万人以上である
- $\forall$ 四国の県 (その人口は 100 万人以上である)

この表現において鍵となる事項

「…である」に出てくる「その」のような指示語は
「任意の〜に対して」に出てくる「〜」を指す

「〜が存在する」という命題の例

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.81	785,873	徳島市
香川県	1,876.58	995,779	高松市
愛媛県	5,678.51	1,430,957	松山市
高知県	7,105.20	764,596	高知市

- 四国には，面積が 1,000km^2 以上の県が存在する
- 四国には，人口が 100 万人以上の県が存在する

「〜が存在する」の表現法

- 四国には，人口が 100 万人以上の県が存在する
- 四国のある県の人口は，100 万人以上である
- 四国のある県に対して，その人口は 100 万人以上である
- 四国にはある県が存在して，その人口は 100 万人以上である
- $\exists$ 四国の県 (その人口は 100 万人以上である)

「任意の〜に対して…である」という命題の否定

次に挙げる命題の否定は何か？

どの四国の県の人口も 100 万人以上である

「任意の〜に対して…である」という命題の否定の作り方

1. 「任意の〜に対して…である」という形に書き換える
2. 「ある〜に対して…ではない」という形に書き換える
3. 日本語として自然になるように整える

「任意の〜に対して⋯である」という命題の否定

次に挙げる命題の否定は何か？

どの四国の県の人口も 100 万人以上である

「任意の〜に対して⋯である」という命題の否定の作り方

1. 「任意の〜に対して⋯である」という形に書き換える
   任意の四国の県に対して，その人口は 100 万人以上である
2. 「ある〜に対して⋯ではない」という形に書き換える
   ある四国の県に対して，その人口は 100 万人以上ではない
3. 日本語として自然になるように整える
   ある四国の県の人口は 100 万人以上ではない

「〜が存在する」という命題の否定

次に挙げる命題の否定は何か？

四国には，人口が 100 万人以上の県が存在する

「〜が存在する」という命題の否定の作り方

1. 「ある〜に対して⋯である」という形に書き換える
2. 「どの〜に対しても⋯ではない」という形に書き換える
3. 日本語として自然になるように整える

「〜が存在する」という命題の否定

次に挙げる命題の否定は何か？

四国には，人口が 100 万人以上の県が存在する

「〜が存在する」という命題の否定の作り方

1. 「ある〜に対して⋯である」という形に書き換える
   ある四国の県に対して，その人口は 100 万人以上である
2. 「どの〜に対しても⋯ではない」という形に書き換える
   どの四国の県に対しても，その人口は 100 万人以上ではない
3. 日本語として自然になるように整える
   どの四国の県の人口も 100 万人以上ではない

目次

命題の証明法

証明とは？

命題が正しいことを論理的に説明する文章

格言

証明は文章．読者に伝わるように書く

「任意の〜に対して⋯である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して，$x^2 + 1 \geq 2x$ である

「任意の〜に対して⋯である」という命題の証明法

1. 「任意の〜を考える」で始め,「したがって，⋯である」で終わる
2. それが「⋯である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

「任意の〜に対して⋯である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して，$x^2 + 1 \geq 2x$ である

<u>証明</u>：任意の実数 x を考える

- 左辺 − 右辺 $= x^2 + 1 - 2x = (x-1)^2 \geq 0$.
- したがって，$x^2 + 1 \geq 2x$ である． □

「任意の〜に対して⋯である」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して，$(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である

「任意の〜に対して⋯である」という命題の証明法

1. 「任意の〜を考える」で始め,「したがって，⋯である」で終わる
2. それが「⋯である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して，$(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である

証明：任意の実数 x を考える．

- $(1+x)^3 + (1-x)^3 = (1+3x+3x^2+x^3) + (1-3x+3x^2-x^3) = 6x^2+2.$
- したがって，$(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2+2$ である． □

目次

「任意の〜に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 1

例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の異なる素数 a, b に対して，$a+b$ は 2 で割り切れる

正しい場合は

- 先ほどのように証明する

正しくない場合は

- その命題の否定を証明する (反例を挙げる)

上の命題の否定

ある異なる素数 a, b に対して，$a+b$ は 2 で割り切れない

反例：$a+b$ が 2 で割り切れないような，異なる素数 a, b

「任意の〜に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 1

例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の異なる素数 a, b に対して，$a+b$ は 2 で割り切れる

解答：これは正しくない．その理由は以下の通りである．

- 異なる素数 $a=2$, $b=3$ を考える．
- このとき，$a+b=2+3=5$ であり，これは 2 で割り切れない． □

「任意の〜に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 2

例題 2：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の実数 x に対して，$x^2 > 0$ である

上の命題の否定

ある実数 x に対して，$x^2 > 0$ ではない

反例：$x^2 > 0$ ではないような実数 x

注意

正しいか正しくないかの見通しは，下書きに書く

「任意の〜に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 2

例題 2：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の実数 x に対して，$x^2 > 0$ である

解答：これは正しくない．その理由は以下の通りである．

- 実数 $x=0$ を考える．
- このとき，$x^2=0$ であり，$x^2>0$ にはならない． □

目次

より複雑な命題の証明：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して，ある実数 y が存在して，$x+y=0$ となる

まず，この命題の意味を理解する

格言

「∀」「∃」が連なるときは，ゲームだと思うと分かりやすい

- ∀：相手の手番 (任意の〜に対して)
- ∃：自分の手番 (ある〜が存在して)

手番を繰り返して，残った命題を成り立たせることが自分の目標

例題 1 に挙げた命題の解釈

相手がどんな実数 x を選んでも，自分がある実数 y を選んで，
自分は $x+y=0$ にできる

より複雑な命題の証明：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して，ある実数 y が存在して，$x+y=0$ となる

「任意の～に対して…である」という命題の証明法

1. 「任意の～を考える」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

より複雑な命題の証明：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して，ある実数 y が存在して，$x+y=0$ となる

証明：任意の x を考える.

- (ここに「ある実数 y が存在して，$x+y=0$ となる」ことの証明を書く)
- したがって，ある実数 y が存在して $x+y=0$ となる. □

「～が存在する」という命題の証明法

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く.
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

より複雑な命題の証明：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して，ある実数 y が存在して，$x+y=0$ となる

証明：任意の x を考える.

- このとき，$y=-x$ を考える．そうすると，$x+y=x+(-x)=0$.
- したがって，ある実数 y が存在して $x+y=0$ となる. □

より複雑な命題の証明：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して，$xy=0$ となる

まず，この命題の意味を理解する

格言 (再掲)

「∀」「∃」が連なるときは，ゲームだと思うと分かりやすい

- ∀：相手の手番 (任意の～に対して)
- ∃：自分の手番 (ある～が存在して)

手番を繰り返して，残った命題を成り立たせることが自分の目標

例題 2 に挙げた命題の解釈

自分がある実数 x を選べば，相手がどんな実数 y を選んでも，
自分は $xy=0$ にできる

より複雑な命題の証明：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して，$xy=0$ となる

証明：実数 $x=0$ を考える.

- (ここに,「任意の実数 y に対して，$xy=0$ となる」ことの証明を書く)
- □

より複雑な命題の証明：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して，$xy=0$ となる

証明：実数 $x=0$ を考える.

- 任意の実数 y を考える.
- このとき，$x=0$ なので，$xy=0$ となる.
- したがって，$xy=0$ となる. □

より複雑な命題の証明：例題 3

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して，$x+y=0$ となる

まず，この命題の意味を理解する

格言 (再掲)

「∀」「∃」が連なるときは，ゲームだと思うと分かりやすい

- ∀：相手の手番 (任意の～に対して)
- ∃：自分の手番 (ある～が存在して)

手番を繰り返して，残った命題を成り立たせることが自分の目標

例題 3 に挙げた命題の解釈

自分がある実数 x を選べば，相手がどんな実数 y を選んでも，
自分は $x+y=0$ にできる

より複雑な命題の証明：例題 3

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して，$x+y=0$ となる

例題 3 に挙げた命題の否定

任意の実数 x に対して，ある実数 y が存在して，$x+y=0$ とならない

例題 3 に挙げた命題の否定の解釈

相手がどんな実数 x を選んでも，自分がある実数 y を選べば，
自分は $x+y=0$ とならないようにできる ($x+y\neq 0$ にできる)

より複雑な命題の証明：例題 3

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して，$x + y = 0$ となる

解答：正しくない．その理由は以下の通りである．

- 任意の実数 x を考える．
- このとき，実数 $y = x^2 + x + 2$ を考える．
- そうすると，
  $x + y = x + (x^2 + x + 2) = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0.$
- したがって，ある実数 y が存在して，$x + y = 0$ とはならない． □

例題 3 に挙げた命題の否定

任意の実数 x に対して，ある実数 y が存在して，$x + y = 0$ とならない

注意：例題 1 と例題 3 から分かること

例題 1

任意の実数 x に対して，ある実数 y が存在して，$x + y = 0$ となる

これは正しい (真)

例題 3：次の命題は正しいか，正しくないか

ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して，$x + y = 0$ となる

これは，正しくない (偽)

格言

命題の真偽は，∀と∃の順序によって変わることがある

目次

今日のまとめ

この講義の目標：復習

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標：復習

- 命題の否定が作れるようになる (前回の復習を兼ねて)
- 「任意の〜に対して…である」という命題の証明ができるようになる
- 反例による証明ができるようになる
- 「任意の〜に対して」,「ある〜が存在して」が連なる命題の証明ができるようになる

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK