離散数学 第 1 回
証明法 (1)：「〜が存在する」ことの証明

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2014 年 4 月 8 日

最終更新：2014 年 4 月 7 日　09:02

概要

主題

- 理工学のあらゆる分野に現れる数学の言葉と論理を徹底的に身につける
- これによって，論理的な思考を行う基礎能力を体得し，将来的に，専門書を読み解き，自分で学術的な文書を書くことができるようにする
- キャッチフレーズは「語学としての数学」

達成目標

以下の 2 項目をすべて達成することを目標とする．

1. 数学における基本的な用語 (集合，論理，関数，関係) を正しく使うことができる
2. 数学における基本的な証明を正しく行うことができる

コミュニケーションとしての数学

π^2って無理数だよね

へー，どうして？

だって，π は無理数だから 2 乗しても無理数だよ

そんなの理由になんないよ
$\sqrt{3}$ は無理数なのに，2 乗した 3 は整数だし

正しい論理を身につけないとだまされる
→ 「コミュニケーションとしての数学」

スケジュール 前半 (予定)

1. 証明法 (1)：「〜が存在する」ことの証明　(4 月 8 日)
2. 証明法 (2)：「任意の〜に対して…である」ことの証明　(4 月 15 日)
3. 証明法 (3)：「〜ならば…である」ことの証明　(4 月 22 日)
- ⋆ 休み (祝日)　(4 月 29 日)
- ⋆ 休み (振替休日)　(5 月 6 日)
4. 集合の記法 (1)：外延的記法と内包的記法　(5 月 13 日)
5. 集合の記法 (2)：直積と冪集合　(5 月 20 日)
6. 証明法 (4)：集合に関する証明　(5 月 27 日)
7. 関数 (1)：像と逆像　(6 月 3 日)
- 中間試験　(6 月 10 日)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 関数 (2)：全射と単射　(6 月 17 日)
- ⋆ 休講 (海外出張)　(6 月 24 日)
- ⋆ 休講 (海外出張)　(7 月 1 日)
9. 関係 (1)：関係　(7 月 8 日)
10. 関係 (2)：同値関係　(7 月 15 日)
11. 関係 (3)：順序関係　(7 月 22 日)
12. 証明法 (5)：数学的帰納法　(7 月 29 日)
13. 集合の記法 (3)：集合の再帰的定義　(8 月 5 日)
- 期末試験　(8 月 12 日？)

注意：予定の変更もありうる

情報

教員
- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

ティーチング・アシスタント (TA)
- 西野 潤 (にしの じゅん)
- 居室：西 4 号館 2 階 202 号室 (岡本研究室)

講義資料
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2014/discretemath/
- 注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う
- 講義前日の昼 12 時までに，ここに置かれる

講義資料

http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2014/discretemath/

- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- 演習問題
- 用語集：よみがな，英訳付き

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

http://video.fp.uec.ac.jp/

- ビデオ

講義終了後，約 1 時間後に視聴可能

授業の進め方

講義 (70 分)
- スライドと板書で進める
- スライドのコピーに重要事項のメモを取る

演習 (20 分)
- 演習問題に取り組む
- 不明な点は教員とティーチング・アシスタントに質問する

退室 (0 分)
- 授業の感想，質問などを小さな紙に書いて提出 (匿名可)
- (感想，質問などの回答は講義の Web ページに掲載)

オフィスアワー：授業終了後
- 質問など

演習問題

演習問題の進め方
- 授業の後半 20 分は演習問題を解く時間
- 残った演習問題は復習・試験対策用
- 注意：「模範解答」のようなものは存在しない

演習問題の種類
- 復習問題：講義で取り上げた内容を反復
- 補足問題：講義で省略した内容を補足
- 追加問題：講義の内容に追加
- 発展問題：少し難しい (かもしれない)

答案の提出
- 演習問題の答案をレポートとして提出してもよい
- レポートには提出締切がある (各回にて指定)
- レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- レポートは添削されて，返却される
  - 返却された内容については，再提出ができる (再提出締切は原則なし)

評価

中間試験と期末試験による
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 3 題は演習問題として提示されたものと同一である
    - ただし，発展問題は出題しない
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 10 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

成績
- min{100, 中間試験の素点 + 期末試験の素点 }

教訓

格言 (三省堂 大辞林)

短い言葉で、人生の真理や処世術などを述べ、教えや戒めとした言葉。「石の上にも三年」「沈黙は金」など。金言。

格言 (この講義における)

講義内容とは直接関係ないかもしれないが，
私 (岡本) が重要だと思うこと

格言 (の例)

単位取得への最短の道のりは，授業に出て，演習問題を解くこと

教科書・参考書

教科書
- 指定しない

全般的な参考書
- コミュニケーションとしての数学基礎を固められるもの
  - 嘉田勝,『論理と集合から始める数学の基礎』，日本評論社，2008 年 〈お薦め〉
  - 渡辺治，木村泰紀，谷口雅治，北野晃朗,『数学の言葉と論理』，朝倉書店，2008 年
  - 中内伸光,『ろんりと集合』，日本評論社，2009 年
- 離散数学の入門書
  - 小倉久和,『はじめての離散数学』，近代科学社，2011 年
  - 石村園子,『やさしく学べる離散数学』，共立出版，2007 年
  - Seymour Lipschutz,『離散数学』，オーム社，1995 年

注意

離散数学の教科書はそれぞれ扱う内容が異なる
(微分積分や線形代数のようにほとんどの本が同じ内容を扱う教科とは違う)

この講義の約束

- 私語はしない (ただし，演習時間の相談は OK)
- 携帯電話はマナーモードにする
- 携帯電話は使わない
- 音を立てて睡眠しない

約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

今日の概要

今日の目標
- 命題とは何か理解する
- 「～が存在する」という命題と「任意の～に対して…である」という命題の意味を理解する
- 「～が存在する」という命題の証明法を理解する
- 「～が存在する」という命題の証明ができるようになる

目次

命題と真偽

命題とは？ (常識に基づいた定義)

真偽を定められる文，あるいは，その内容

例：トランプでゲームをしているような状況で
- 「一郎はハートの 4 を持っている」
- 「二郎はクラブの Q を持っている」

命題であるか？ 命題ではないか？

- $\sqrt{2}$ は無理数である
- 2014 年 4 月 9 日は月曜日である
- 2014 年は戌年ですか？
- 2014 年は戌年です
- やったー！
- ワールドカップでは準決勝に進出します！
- 調布市は広い

例として考える状況：データベース

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.81	785,873	徳島市
香川県	1,876.58	995,779	高松市
愛媛県	5,678.51	1,430,957	松山市
高知県	7,105.20	764,596	高知市

出典：http://ja.wikipedia.org/ 内
(2014 年 4 月 4 日アクセス)
人口は 2010 年国勢調査による

http://www.craftmap.box-i.net/

例として考える状況：データベース (2)

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.81	785,873	徳島市
香川県	1,876.58	995,779	高松市
愛媛県	5,678.51	1,430,957	松山市
高知県	7,105.20	764,596	高知市

- 徳島県の面積は 4,000km^2 以上である　　真
- 香川県の県庁所在地は丸亀市である　　偽
- 四国 4 県の中で最も人口が多いのは愛媛県である　　真

例として考える状況：データベース (3)

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.81	785,873	徳島市
香川県	1,876.58	995,779	高松市
愛媛県	5,678.51	1,430,957	松山市
高知県	7,105.20	764,596	高知市

- 愛媛県の人口は 100 万人以上で，かつ，
  高知県の人口は 50 万人以下である　　偽
  (命題の論理積 (AND) も命題)
- 香川県の県庁所在地は丸亀市ではない　　真
  (命題の否定 (NOT) も命題)
- 愛媛県の県庁所在地は宇和島市であるか，または，
  愛媛県の県庁所在地は松山市である　　真
  (命題の論理和 (OR) も命題)

目次

「任意の〜に対して…である」という命題の例

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.81	785,873	徳島市
香川県	1,876.58	995,779	高松市
愛媛県	5,678.51	1,430,957	松山市
高知県	7,105.20	764,596	高知市

- 任意の四国の県に対して，その面積は 1,000km^2 以上である
- 任意の四国の県に対して，その人口は 100 万人以上である

「任意の〜に対して…である」の表現法

- 任意の四国の県に対して，その人口は 100 万人以上である
- どの四国の県に対しても，その人口は 100 万人以上である
- すべての四国の県に対して，その人口は 100 万人以上である
- 任意の四国の県の人口は 100 万人以上である
- どの四国の県の人口も 100 万人以上である
- すべての四国の県の人口は 100 万人以上である
- $\forall$ 四国の県 (その人口は 100 万人以上である)

この表現において鍵となる事項

「…である」に出てくる「その」のような指示語は
「任意の〜に対して」に出てくる「〜」を指す

「任意の〜に対して…である」という命題の真偽 (1)

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.81	785,873	徳島市
香川県	1,876.58	995,779	高松市
愛媛県	5,678.51	1,430,957	松山市
高知県	7,105.20	764,596	高知市

「任意の四国の県に対して，その面積は 1,000km^2 以上である」の真偽

- 徳島県の面積は 1,000km^2 以上である　　真
- 香川県の面積は 1,000km^2 以上である　　真
- 愛媛県の面積は 1,000km^2 以上である　　真
- 高知県の面積は 1,000km^2 以上である　　真

$\therefore$「任意の四国の県に対して，その面積は 1,000km^2 以上である」は真

1 つ 1 つがどれも真であれば，全体として真

「任意の〜に対して⋯である」という命題の真偽 (2)

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.81	785,873	徳島市
香川県	1,876.58	995,779	高松市
愛媛県	5,678.51	1,430,957	松山市
高知県	7,105.20	764,596	高知市

「任意の四国の県に対して，その人口は 100 万人以上である」の真偽

- 徳島県の人口は 100 万人以上である　偽
- 香川県の人口は 100 万人以上である　偽
- 愛媛県の人口は 100 万人以上である　真
- 高知県の人口は 100 万人以上である　偽

∴「任意の四国の県に対して，その面積は 1,000km^2 以上である」は偽

どれか 1 つでも偽があれば，全体として偽

「任意の〜に対して⋯である」の例

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ を考える

- 任意の A の要素は奇数である　真
- 任意の A の要素は偶数である　偽
- 任意の A の要素は素数である　偽

目次

「〜が存在する」という命題の例

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.81	785,873	徳島市
香川県	1,876.58	995,779	高松市
愛媛県	5,678.51	1,430,957	松山市
高知県	7,105.20	764,596	高知市

- 四国には，面積が 1,000km^2 以上の県が存在する
- 四国には，人口が 100 万人以上の県が存在する

「〜が存在する」の表現法

- 四国には，人口が 100 万人以上の県が存在する
- 四国のある県の人口は，100 万人以上である
- 四国のある県に対して，その人口は 100 万人以上である
- 四国にはある県が存在して，その人口は 100 万人以上である
- $\exists$ 四国の県 (その人口は 100 万人以上である)

「〜が存在する」という命題の真偽 (1)

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.81	785,873	徳島市
香川県	1,876.58	995,779	高松市
愛媛県	5,678.51	1,430,957	松山市
高知県	7,105.20	764,596	高知市

「四国には，面積が 1,000km^2 以上の県が存在する」の真偽

- 徳島県の面積は 1,000km^2 以上である　真
- 香川県の面積は 1,000km^2 以上である　真
- 愛媛県の面積は 1,000km^2 以上である　真
- 高知県の面積は 1,000km^2 以上である　真

∴「四国には，面積が 1,000km^2 以上の県が存在する」は真

1 つでも真であれば，全体として真

「〜が存在する」という命題の真偽 (2)

県名	面積 (km^2)	人口 (人)	県庁所在地
徳島県	4,146.81	785,873	徳島市
香川県	1,876.58	995,779	高松市
愛媛県	5,678.51	1,430,957	松山市
高知県	7,105.20	764,596	高知市

「四国には，人口が 100 万人以上の県が存在する」の真偽

- 徳島県の人口は 100 万人以上である　偽
- 香川県の人口は 100 万人以上である　偽
- 愛媛県の人口は 100 万人以上である　真
- 高知県の人口は 100 万人以上である　偽

∴「四国には，人口が 100 万人以上の県が存在する」は真

1 つでも真であれば，全体として真

「〜が存在する」の例

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ を考える

- 集合 A には，奇数が存在する　真
- 集合 A には，偶数が存在する　偽
- 集合 A には，素数が存在する　真

「任意の〜に対して…である」という命題の否定

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ を考える

次に挙げる命題の否定は何か？

集合 A の任意の要素は奇数である

- 集合 A の任意の要素は奇数ではない ×
- 集合 A には，奇数ではない要素が存在する ○
- 集合 A のある要素は奇数ではない ○

格言

標語的にいうと「$\forall$ の否定」は「否定の $\exists$」

「〜が存在する」という命題の否定

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ を考える

次に挙げる命題の否定は何か？

集合 A には，素数が存在する

- 集合 A には，素数が存在しない ○
- 集合 A の任意の要素は素数ではない ○
- 集合 A のある要素は素数ではない ×

格言

標語的にいうと「$\exists$ の否定」は「否定の $\forall$」

目次

命題の証明法

証明とは？

命題が正しいことを論理的に説明する文章

格言

証明は文章．読者に伝わるように書く

「〜が存在する」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

格言

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

ある数が素数であることとは何なのか？ 定義を思い出す

素数とは ?: 素数の定義

自然数 n が素数であるとは，それが 1 と n 以外の自然数で割り切れないこと

「〜が存在する」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

証明：集合 A の要素である 3 を考える．

- 3 は 1 と 3 以外の自然数で割り切れないので，3 は素数である．
- したがって，A には素数が存在する． □

証明終了の記号 ↑

「〜が存在する」という命題の証明法

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ，「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)．

「〜が存在する」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

別証明：集合 A の要素である 7 を考える．

- 7 は 1 と 7 以外の自然数で割り切れないので，7 は素数である．
- したがって，A には素数が存在する． □

「〜が存在する」という命題の証明法

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ，「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)．

「〜が存在する」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

「〜が存在する」という命題の証明法

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ，「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)．

要求されている性質

- 自然数である
- 3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 である

「〜が存在する」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

証明：自然数 17 を考える．

- 17 を 3 で割ると，$17 = 5 \times 3 + 2$ なので，余りは 2 である．
- 17 を 7 で割ると，$17 = 2 \times 7 + 3$ なので，余りは 3 である．
- したがって，3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数は存在する． □

疑問点

「17」はどのようにして見つかったのか？

「〜が存在する」という命題の証明法：下書きと清書

格言

証明では「下書き」と「清書」を区別し，証明として書くものは清書のみ

下書き

- 「17」やそれに代わるものを見つける過程を書く
- 確かに，それが要求されている性質を満たすことを確かめる

清書

- 前のページのように，まとまった証明を書く

どうしてそうするのか？

- 「3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する」ことが正しいのかどうか，ということだけが読者の興味の対象
- 証明では，それが確認できさえすればよい

「〜が存在する」という命題の証明法：例題 2 (下書き)

- 「3 で割ると余りが 2 となる自然数」は $3k+2$ と書ける (ただし，k は非負整数)
- これを 7 で割った余りが 3 となればよい
- $k = 0$ のとき，$3k+2 = 2$ で，7 で割った余りは 2
- $k = 1$ のとき，$3k+2 = 5$ で，7 で割った余りは 5
- $k = 2$ のとき，$3k+2 = 8$ で，7 で割った余りは 1
- $k = 3$ のとき，$3k+2 = 11$ で，7 で割った余りは 4
- $k = 4$ のとき，$3k+2 = 14$ で，7 で割った余りは 0
- $k = 5$ のとき，$3k+2 = 17$ で，7 で割った余りは 3

ということなので，17 を考えればよい

「〜が存在する」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

別証明：自然数 80 を考える．

- 80 を 3 で割ると，$80 = 26 \times 3 + 2$ なので，余りは 2 である．
- 80 を 7 で割ると，$80 = 11 \times 7 + 3$ なので，余りは 3 である．
- したがって，3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数は存在する． □

「〜が存在する」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題を証明せよ

$x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x が存在する

「〜が存在する」という命題の証明法

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ，「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)．

x に要求されている性質

- x は実数である
- $x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす

例題 3：下書き

- 条件「$x^2 - 5x + 6 < 0$」の左辺を変形してみる
$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$
- よって，$(x-2)(x-3) < 0$ となるような x を考えたい
- 「$(x-2)(x-3) < 0$」は「$2 < x < 3$」と同値
- なので，2 よりも大きく，3 よりも小さい実数を考えればよい

「〜が存在する」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題を証明せよ

$x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x が存在する

証明：実数 x として $x = \frac{5}{2}$ を考える．

- このとき，
$$x^2 - 5x + 6 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{24}{4} = -\frac{1}{4} < 0.$$
- したがって，$x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x は存在する． □

今一度強調

- 選んだものは書く必要がある (この場合は，$\frac{5}{2}$)
- $\frac{5}{2}$ がどのように出てきたのかは書く必要がない

嘉田 勝「証明を理解するための考え方」を参照
(数学セミナー 2009 年 5 月号，http://www.mi.s.osakafu-u.ac.jp/~kada/susemi0905/)

目次

今日のまとめ (1)

この講義の目標：復習

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標：復習

- 命題とは何か理解する
- 「〜が存在する」という命題と「任意の〜に対して⋯である」という命題の意味を理解する
- 「〜が存在する」という命題の証明法を理解する
- 「〜が存在する」という命題の証明ができるようになる

今日のまとめ (2)

格言

- 証明は文章．読者に伝わるように書く
- 証明では「下書き」と「清書」を区別し，証明として書くものは清書のみ

「〜が存在する」という命題の証明法

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く.
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK