

17:50–19:20. A4用紙(両面自筆書き込み)のみ持ち込み可.
携帯電話, タブレット等は電源を切ってカバンの中にする事.

問題 1. 集合 X, Y を $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ と定義し, 関数 $f: X \rightarrow Y$ を $f(1) = 7, f(2) = 5, f(3) = 5, f(4) = 9$ で定義する. このとき, 次の集合がそれぞれ何であるか, その要素をすべて並べること(外延的定義)により答えよ. (理由を記す必要はない.)

1. $f(\{2, 3, 4\})$.
2. $f^{-1}(\{6, 7, 8\})$.
3. $f^{-1}(f(\{1, 3\}))$.

問題 2. 任意の集合 A, B , 任意の関数 $f: A \rightarrow B$, 任意の部分集合 $X, X' \subseteq A$ に対して

$$f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X')$$

が成り立つことを証明せよ.

問題 3. 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$ であるとして定義する. (注: \mathbb{R} はすべての実数から成る集合を表す.)

1. 関数 f が全射ではないことを証明せよ.
2. 関数 f が単射ではないことを証明せよ.

問題 4. 1以上20以下のすべての整数から成る集合を $A = \{1, \dots, 20\}$ とする. この集合 A 上の同値関係 R を次のように定義する. すなわち, 任意の $x, y \in A$ に対して, $x R y$ であることを「 $x - y$ が5で割り切れること」とする. このとき, 商集合 A/R がどのような集合であるか, 記述せよ.

(注: 関係 R が A 上の同値関係となることを証明する必要はない. また, 商集合 A/R が解答の通りとなる理由を記す必要はない.)

問題 5. 集合 $D = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$ は自然数100の約数をすべて集めて作ったものである. 正整数 a, b に対して, $a | b$ を「 a が b の約数である」と定義する.

1. 半順序集合 $(D, |)$ のハッセ図を描け. (理由を記す必要はない.)
2. 半順序集合 $(D, |)$ に対して, 次の問いに答えよ. ただし, 該当するものが存在しない場合は「存在しない」と答えよ. (理由を記す必要はない.)
 - (a) $\{4, 10\}$ の上界をすべて挙げよ.
 - (b) $\{20, 50, 100\}$ の下限をすべて挙げよ.

問題 6. 3以上の任意の正の整数 n に対して $6n \leq 3^n$ となることを数学的帰納法により証明せよ.

以上

採点終了次第, 講義 web ページにて, 得点分布, 講評などを掲載する.

採点結果を知りたい場合は, 解答用紙右上「評点」欄の中に5文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと. (その文字列は覚えておくように.) 採点終了後, そのランダム文字列と得点の対応表を公開する.