離散数学	2014 年 8 月 8 日
期末試験	岡本 吉央

17:50–19:20．A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可．
携帯電話，タブレット等は電源を切ってカバンの中にしまうこと．

問題 1. 集合 X, Y, Z を $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{5,6,7,8\}$, $Z = \{9,10,11\}$ と定義する．関数 $f \colon X \to Y$ を $f(1) = 7, f(2) = 5, f(3) = 5, f(4) = 6$ で定義する．関数 $g \colon Y \to Z$ を $g(5) = 10, g(6) = 10, g(7) = 9, g(8) = 11$ で定義する．このとき，次の集合がそれぞれ何であるか，その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．(理由を記す必要はない．)

1. $f(\{1,2,4\})$.
2. $g(\{5,6\})$.
3. $f^{-1}(\{6,7,8\})$.
4. $g^{-1}(\{10\})$.
5. $f^{-1}(f(\{1,3\}))$.
6. $(g \circ f)(\{2,3\})$.

問題 2. 関数 $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$ であるとして定義する．(注：$\mathbb{R}$ はすべての実数から成る集合を表す．)

1. 関数 f が全射ではないことを証明せよ．
2. 関数 f が単射ではないことを証明せよ．

問題 3. 集合 $K = \{1,2,3\}$ 上の関係 R を次のように定義する．すなわち，任意の $x, y \in K$ に対して $x \mathrel{\mathrm{R}} y$ であることを $x^2 + y$ が 2 で割り切れることとする．この関係 R が次の性質を持つかどうか答えよ．理由も述べること．

1. 反射性．
2. 完全性．
3. 反対称性．

問題 4. 次にあげるそれぞれの半順序集合に対して，そのハッセ図を描け．(理由を記す必要はない．)

1. $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$.
2. $(\{1,2,3,4\}, \leq)$.

問題 5. 集合 A 上の同値関係 R と，任意の要素 $a, a' \in A$ を考える．このとき，$a \mathrel{\mathrm{R}} a'$ ならば，$[a]_{\mathrm{R}} = [a']_{\mathrm{R}}$ となることを証明せよ．(注：$[a]_{\mathrm{R}}$ は R における a の同値類を表す．)

問題 6. 任意の正の整数 n に対して，数 a_n を

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2a_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．このとき，任意の正の整数 n に対して，

$$a_n = \frac{1}{3}((-1)^n + 2^{n+1})$$

が成り立つことを証明せよ．

以上

採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．
採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと．(その文字列は覚えておくように．中間試験のときのものと異なっていてもよい．) 採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．