離散数学 (12) **2014 年 7 月 29 日**

演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2014 年 8 月 5 日 第 6 時限

復習問題 12.1 任意の正の整数 n に対して

$$8^n - 3^n \text{ が 5 で割り切れる}$$

ことを数学的帰納法により証明せよ．

復習問題 12.2 任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを数学的帰納法により証明せよ．

復習問題 12.3 3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n \leq 3^n$$

となることを数学的帰納法により証明せよ．

復習問題 12.4 任意の正の整数 n に対して，a_n を

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する．このとき，任意の正の整数 n に対して，

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ．

復習問題 12.5 任意の正の整数 n に対して，第 n 番フィボナッチ数 F_n を

$$F_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ F_{n-1} + F_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．任意の正整数 n に対して

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 12.6 第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき，任意の正の整数 n に対して，

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

が成り立つことを証明せよ．

追加問題 12.7 任意の正の整数 n に対して

$$11^n - 4^n \text{ が 7 で割り切れる}$$

ことを数学的帰納法により証明せよ．

追加問題 12.8 3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$3n^2 \leq 3^n$$

となることを数学的帰納法により証明せよ．(ヒント：問題 12.3 の結果を用いてもよい．)

追加問題 12.9 任意の正の整数 n に対して，C_n を次のように定義する

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1} & (n > 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき，任意の正の整数 n に対して，

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

となることを証明せよ．(補足：C_n はカタラン数と呼ばれ，よく研究されているものである．)

追加問題 12.10 任意の正の整数 n に対して，H_n を次のように定義する

$$H_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ H_{n-1} + \frac{1}{n} & (n > 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき，任意の正の整数 n に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$$

が成り立つことを証明せよ．(補足：H_n は調和数と呼ばれ，よく研究されているものである．)

発展追加問題 12.11 第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき，任意の正の整数 n に対して，

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \text{ および } F_{2n+2} = F_{n+2}^2 - F_n^2$$

が成り立つことを証明せよ．