

提出締切：2014年7月22日 第6時限

復習問題 10.1 集合 A の分割 P を考える。このとき、集合 A 上の関係 R を次のように定義する。すなわち、 xRy であることを、ある $X \in P$ が存在して、 $x \in X$ かつ $y \in X$ であることとする。このとき、 R が A 上の同値関係となることを証明せよ。

復習問題 10.2 集合 A 上の同値関係 R に対して、 R に関する A の商集合 A/R が A の分割であることを証明せよ。

補足問題 10.3 集合 A 上の同値関係 R と、任意の要素 $a, a' \in A$ を考える。このとき、 aRa' ならば、 $[a]_R = [a']_R$ となることを証明せよ。

追加問題 10.4 集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 上の同値関係 \equiv_2 を考える (\equiv_2 の定義は復習問題 9.6 を参照のこと)。このとき、商集合 A/\equiv_2 がどのような集合であるか、記述せよ。

追加問題 10.5 集合 A 上の同値関係 R に対して、関数 $f: A \rightarrow A/R$ を次のように定義する。すなわち、任意の $a \in A$ に対して、 $f(a) = [a]_R$ とする。このとき、 f が全射となることを証明せよ。

発展追加問題 10.6 集合 A 上の関係 R_1 、集合 B 上の関係 R_2 に対して、直積 $A \times B$ 上の関係 R を次のように定義する。すなわち、任意の $(a, b), (a', b') \in A \times B$ に対して、 $(a, b)R(a', b')$ であることを、 aR_1a' かつ bR_2b' であることとする。

1. 関係 R_1, R_2 がともに同値関係であるとき、 R も同値関係であることを証明せよ。
2. 任意の $a \in A, b \in B$ に対して、

$$[a]_{R_1} \times [b]_{R_2} = [(a, b)]_R$$

が成り立つことを証明せよ。