

提出締切：2014年7月22日 第6時限

**復習問題 10.1** 集合  $A$  の分割  $P$  を考える。このとき、集合  $A$  上の関係  $R$  を次のように定義する。すなわち、 $xRy$  であることを、ある  $X \in P$  が存在して、 $x \in X$  かつ  $y \in X$  であることとする。このとき、 $R$  が  $A$  上の同値関係となることを証明せよ。

**復習問題 10.2** 集合  $A$  上の同値関係  $R$  に対して、 $R$  に関する  $A$  の商集合  $A/R$  が  $A$  の分割であることを証明せよ。

**補足問題 10.3** 集合  $A$  上の同値関係  $R$  と、任意の要素  $a, a' \in A$  を考える。このとき、 $aRa'$  ならば、 $[a]_R = [a']_R$  となることを証明せよ。

**追加問題 10.4** 集合  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  上の同値関係  $\equiv_2$  を考える ( $\equiv_2$  の定義は復習問題 9.6 を参照のこと)。このとき、商集合  $A/\equiv_2$  がどのような集合であるか、記述せよ。

**追加問題 10.5** 集合  $A$  上の同値関係  $R$  に対して、関数  $f: A \rightarrow A/R$  を次のように定義する。すなわち、任意の  $a \in A$  に対して、 $f(a) = [a]_R$  とする。このとき、 $f$  が全射となることを証明せよ。

**発展追加問題 10.6** 集合  $A$  上の関係  $R_1$ 、集合  $B$  上の関係  $R_2$  に対して、直積  $A \times B$  上の関係  $R$  を次のように定義する。すなわち、任意の  $(a, b), (a', b') \in A \times B$  に対して、 $(a, b)R(a', b')$  であることを、 $aR_1a'$  かつ  $bR_2b'$  であることとする。

1. 関係  $R_1, R_2$  がともに同値関係であるとき、 $R$  も同値関係であることを証明せよ。
2. 任意の  $a \in A, b \in B$  に対して、

$$[a]_{R_1} \times [b]_{R_2} = [(a, b)]_R$$

が成り立つことを証明せよ。