

提出締切：2014年7月15日 第6時限

**復習問題 9.1** 次に挙げるそれぞれの集合  $A$  とその上の関係  $R$  に対して、その関係を表現するグラフを描け。また、それぞれの関係が反射性、完全性、対称性、反対称性、推移性を持つかどうか答えよ。(理由も述べること。)

1. 集合  $A = \{1, 2, 3, 6\}$  上の関係  $R$  で、任意の  $x, y \in A$  に対して  $xRy$  であることを  $x$  が  $y$  の約数であることと定義する。
2. 集合  $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$  上の関係  $R$  で、任意の  $X, Y \in A$  に対して  $XY$  であることを  $X \subseteq Y$  と定義する。
3. 集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  上の関係  $R$  で、任意の  $x, y \in A$  に対して  $xRy$  であることを  $x < y$  と定義する。
4. 集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  上の関係  $R$  で、任意の  $x, y \in A$  に対して  $xRy$  であることを  $x = y$  と定義する。
5. 集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  上の関係  $R$  で、任意の  $x, y \in A$  に対して  $xRy$  であることを  $x \equiv y \pmod{3}$  と定義する。

**復習問題 9.2**  $\mathbb{R}$  上の大小関係  $\leq$  が全順序であることを証明せよ。

**復習問題 9.3** 任意の集合  $A$  に対して、その冪集合  $2^A$  上の関係  $\subseteq$  が半順序であることを証明せよ。

**復習問題 9.4** 1以上の整数全体の集合を  $\mathbb{Z}_+$  と書くことにする。 $\mathbb{Z}_+$  上の関係  $|$  を次のように定義する。すなわち、任意の  $a, b \in \mathbb{Z}_+$  に対して  $a|b$  であることは  $a$  が  $b$  の約数であることとする。このとき、 $|$  が半順序であることを証明せよ。

**復習問題 9.5**  $\mathbb{R}$  上の関係  $=$  が同値関係であることを証明せよ。

**復習問題 9.6**  $p$  を 1 以上の整数として、 $\mathbb{N}$  を 0 以上の整数全体の集合とする。 $\mathbb{N}$  上の関係  $\equiv_p$  を次のように定義する。すなわち、任意の  $m, n \in \mathbb{N}$  に対して  $m \equiv_p n$  であることは  $m \equiv n \pmod{p}$  であることとする。

このとき、 $\equiv_p$  が同値関係であることを証明せよ。

**追加問題 9.7** 集合  $A = \{-1, -2, 0, 1, 2\}$  上の次の関係  $R_1, R_2, R_3$  が反射性、完全性、対称性、反対称性、推移性を持つか、答えよ。(その理由も述べよ。)

1. 任意の  $x, y \in A$  に対して、 $xR_1y$  であることを  $x - y \leq 1$  であることとする。
2. 任意の  $x, y \in A$  に対して、 $xR_2y$  であることを  $x - y \leq -1$  であることとする。
3. 任意の  $x, y \in A$  に対して、 $xR_3y$  であることを  $x^2 - y^2 = 0$  であることとする。

**追加問題 9.8**  $\mathbb{R}^2$  上の関係  $\preceq$  を次のように定義する。すなわち、任意の  $(x, x'), (y, y') \in \mathbb{R}^2$  に対して、 $(x, x') \preceq (y, y')$  であることを  $x \leq y$  かつ  $x' \leq y'$  であることとする。このとき、 $\preceq$  が半順序となることを証明せよ。

**追加問題 9.9** 任意の集合  $A, B$  と任意の関数  $f: A \rightarrow B$  を考える。 $A$  上の関係  $R$  を次のように定義する。すなわち、任意の  $x, y \in A$  に対して、 $xRy$  であることを  $f(x) = f(y)$  であることとする。このとき、 $R$  が同値関係となることを証明せよ。

**発展追加問題 9.10**  $\mathbb{R}^2$  上の関係  $\preceq$  を次のように定義する。すなわち、任意の  $(x, x'), (y, y') \in \mathbb{R}^2$  に対して、 $(x, x') \preceq (y, y')$  であることを「 $x \geq y$  ならば『 $x = y$  かつ  $x' \leq y'$ 』」であることとする。このとき、 $\preceq$  が全順序となることを証明せよ。(ヒント： $\mathbb{R}$  上の大小関係  $\leq$  が完全性、すなわち、任意の  $x, y \in \mathbb{R}$  に対して「 $x \leq y$  または  $y \leq x$ 」を満たす、ということを使って、場合分けを行ってみよ。)