離散数学 (8) **2014 年 6 月 17 日**

演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2014 年 7 月 8 日 第 6 時限

復習問題 8.1 集合 $A = \{1,2,3,4\}, B = \{1,2,3\}$ に対して，次で定義される各関数が全射であるか，単射であるか，全単射であるか，理由も付けて答えよ．

1. $f_1 : A \to B$ で，$f_1(1) = 1$，$f_1(2) = 3$，$f_1(3) = 1$，$f_1(4) = 3$.
2. $f_2 : A \to B$ で，$f_2(1) = 3$，$f_2(2) = 1$，$f_2(3) = 3$，$f_2(4) = 2$.
3. $f_3 : B \to A$ で，$f_3(1) = 2$，$f_3(2) = 4$，$f_3(3) = 2$.
4. $f_4 : B \to A$ で，$f_4(1) = 2$，$f_4(2) = 1$，$f_4(3) = 3$.
5. $f_5 : B \to B$ で，$f_5(1) = 2$，$f_5(2) = 2$，$f_5(3) = 1$.
6. $f_6 : B \to B$ で，$f_6(1) = 3$，$f_6(2) = 1$，$f_6(3) = 2$.

復習問題 8.2 関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$ であるとして定義する．

1. 関数 f が全射であることを証明せよ．
2. 関数 f が単射であることを証明せよ．
3. 関数 f の逆関数 $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が何であるか，答えよ．

復習問題 8.3 関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$ であるとして定義する．

1. 関数 f が全射ではないことを証明せよ．
2. 関数 f が単射ではないことを証明せよ．

補足問題 8.4 実数の集合 $A, B \subseteq \mathbb{R}$ に対して，関数 $f\colon A \to B$ を任意の $a \in A$ に対して $f(a) = a^2$ であるとして定義する．以下のように A と B を定めるとき，関数 f が全射であるか，単射であるか，全単射であるか，答えよ．

1. $A = \mathbb{R}$，$B = [0, \infty)$.
2. $A = [0, \infty)$，$B = [0, \infty)$.
3. $A = [0, 1]$，$B = [0, \infty)$.

補足問題 8.5 任意の集合 A, B と任意の関数 $f\colon A \to B$ を考える．関数 f が全単射であるとき，その逆関数 f^{-1} も全単射であることを証明せよ．

追加問題 8.6 次のそれぞれの関数が全射であるか，単射であるか，全単射であるか，理由も付けて答えよ．そして，全単射である場合は，その逆関数が何であるか，答えよ．

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$f_1(a) = a^3$.
2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$f_2(a) = 2^a$.
3. $f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ で, 任意の $a \in \mathbb{Z}$ に対して，$f_3(a) = 2a + 1$.
4. $f_4 : \{-1,0,1\} \to \{-1,0,1\}$ で，任意の $a \in \{-1,0,1\}$ に対して，$f_4(a) = a(a-1)(a+1)$.

追加問題 8.7 1 つ以上の整数の集合 $X \subseteq \mathbb{Z}$ に対して，X の要素である整数の中で最も小さいものを $\min X$ と表すことにする．例えば，$X = \{-3, 0, 2\}$ であるとき，$\min X = -3$ である．

関数 $f\colon 2^{\mathbb{Z}} \to 2^{\mathbb{Z}}$ を，任意の $X \in 2^{\mathbb{Z}}$ に対して

$$f(X) = \begin{cases} X - \{\min X\} & (X \neq \emptyset \text{ のとき}), \\ \emptyset & (X = \emptyset \text{ のとき}) \end{cases}$$

であると定義する．以下の問いに答えよ．

1. 関数 f が全射であることを証明せよ．
2. 関数 f が単射ではないことを証明せよ．