最適化手法 第 14 回
ネットワーク最適化 (7)：最小費用流問題の応用 (1)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

2013 年 7 月 19 日

最終更新：2013 年 7 月 20 日　22:51

今日の概要

今日の目標

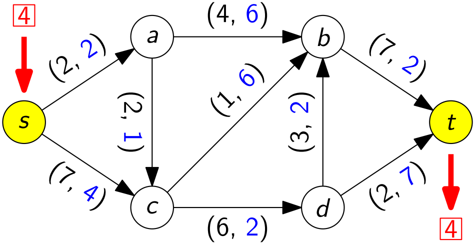
- 最小費用流問題に対する以下の変種を扱えるようになる
  - 流入頂点と流出頂点が複数ある場合
  - 流量下限がある場合
- 以下の問題を最小費用流問題として定式化できるようになる
  - 輸送問題
  - 割当問題

最小費用流問題とは？(復習)

最小費用流問題とは？

入力

- **有向グラフ** $G = (V, E)$**，各辺** $e \in E$ **の容量と費用，**
  2 頂点 $s, t \in V$**，** s **から** t **への流量** b
  (辺容量は非負実数，辺費用は負かもしれない実数，流量は非負実数)



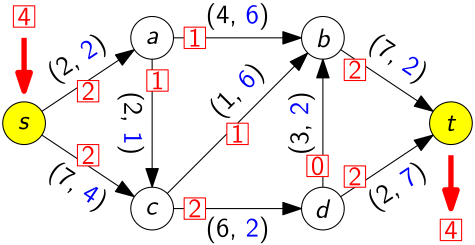
各辺に「(容量, 費用)」が書いてあり， $b = 4$

最小費用流問題とは？ (復習)

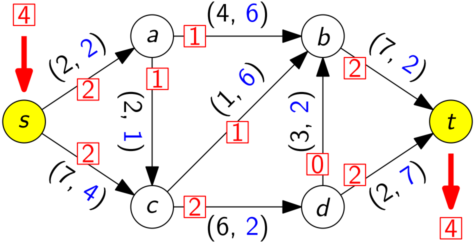
最小費用流問題とは？

出力

- s から t へ至る流れで，その流量が b であり，費用和が最小のもの $\leadsto$ **費用の測り方は？** (次ページ)



流れの費用：計算例 (復習)



この流れの費用 $= \boxed{2} \times 2 + \boxed{2} \times 4 + \boxed{1} \times 1 + \boxed{1} \times 6 + \boxed{1} \times 6 + \boxed{2} \times 2 + \boxed{0} \times 2 + \boxed{2} \times 2 + \boxed{2} \times 7$

$= 4 + 8 + 1 + 6 + 6 + 4 + 0 + 4 + 14$

$= 47$

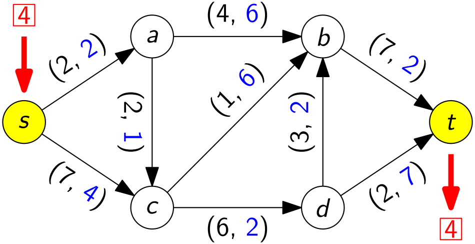
最小費用流問題の解き方 (復習)

解き方 1：線形計画問題として定式化

例えば，単体法を用いて解く

解き方 2：最小費用流問題独自のアルゴリズムを利用

例えば，逐次最短路法を用いて解く

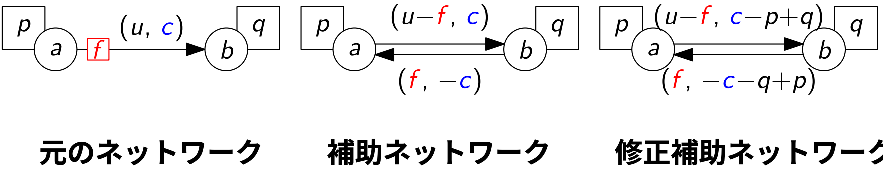


逐次最短路法の手順

- 各頂点にポテンシャルを持たせる (ポテンシャルの初期値 $=0$)
- どの辺にも流れが存在しない状況から始める

以下を繰り返す

1. 補助ネットワークを作成
2. 修正補助ネットワークを作成
3. 修正補助ネットワーク上で，最短路木を作成
4. s を始点，t を終点とする最短路に沿って流せるだけ流す
5. ポテンシャルの修正　(新ポテンシャル = 旧ポテンシャル − 最短路長)



目次

最小費用流問題の変種

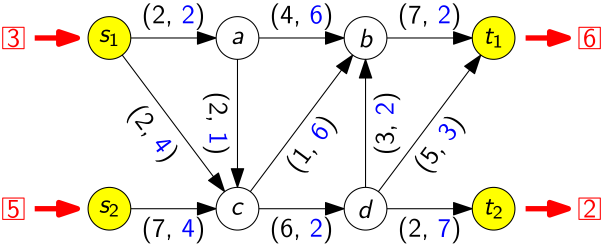
今からやること

次の 2 つの問題を最小費用流問題として定式化する

- **流入頂点と流出頂点が複数あるような最小費用流問題**
- **流量下限を持つ最小費用流問題**

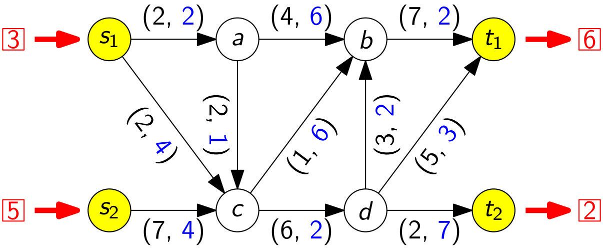
これによって,「最小費用流問題」の扱える分野が広がる

変種 1：流入頂点と流出頂点が複数ある場合

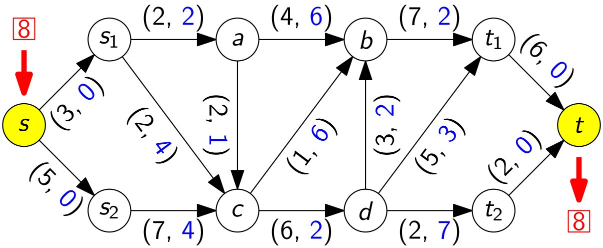


変種 1：流入頂点と流出頂点が複数ある場合 (定式化)

元のネットワーク

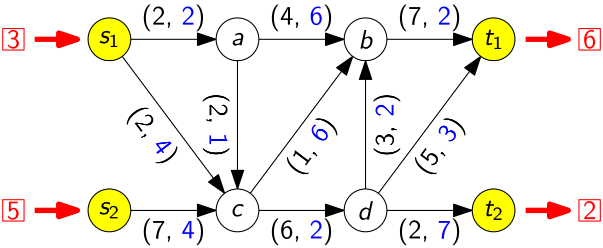


定式化として得られたネットワーク

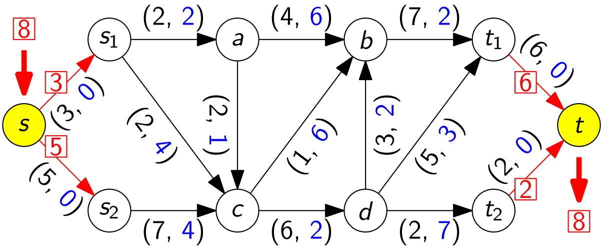


変種 1：流入頂点と流出頂点が複数ある場合 (なぜこれでよいのか？)

元のネットワーク

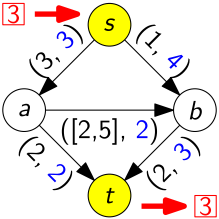


定式化として得られたネットワーク



変種 2：流量下限がある場合

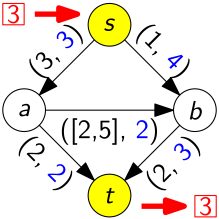
辺 (a, b) 上の流れは 2 以上 5 以下でなければならない



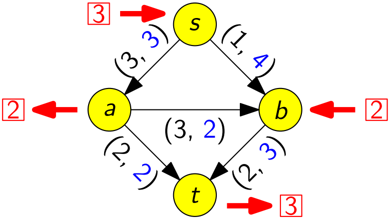
([流量下限, 容量], 費用)

変種 2：流量下限がある場合 (定式化)

元のネットワーク



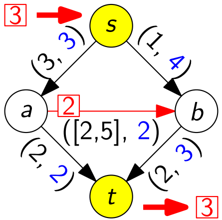
定式化として得られたネットワーク (の前段階)



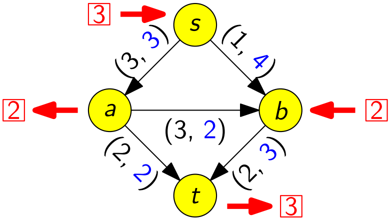
cost $+= 2 \cdot 2 = 4$

変種 2：流量下限がある場合 (なぜこれでよいのか？)

元のネットワーク



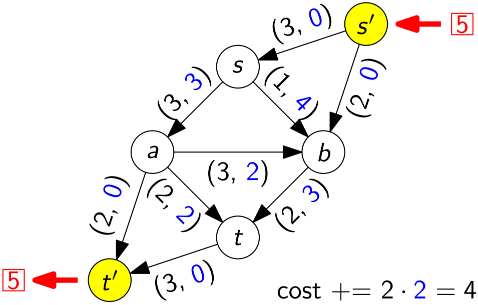
定式化として得られたネットワーク (の前段階)



cost $+= 2 \cdot 2 = 4$

変種 2：流量下限がある場合 (最終的な定式化)

最終的に，定式化として得られたネットワーク



cost $+= 2 \cdot 2 = 4$

目次

例：製品の輸送

- ある製品の生産者 3 人 (P1, P2, P3)，消費者 4 人 (C1, C2, C3, C4)
- 各生産者の年間生産量，各消費者の年間消費量は
  左下の表の通り
- 各生産者から各消費者へ単位量輸送するのにかかる費用は
  右下の表の通り
- [問] 輸送総費用を最小とするような輸送法を決定したい

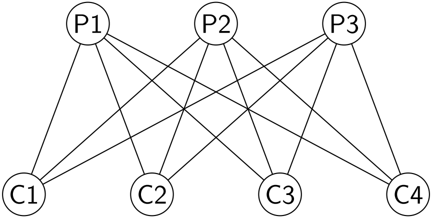
生産者	P1	P2	P3	
生産量	135	56	93	
消費者	C1	C2	C3	C4
消費量	62	83	48	91

	C1	C2	C3	C4
P1	132	200	97	103
P2	85	91	182	210
P3	106	89	100	98

注：総生産量 $= 135 + 56 + 93 = 284 = 62 + 83 + 48 + 91 =$ 総消費量

グラフを使って状況整理

- 上側：生産者，下側：消費者
- 辺：生産者と消費者の間



生産者	P1	P2	P3	
生産量	135	56	93	
消費者	C1	C2	C3	C4
消費量	62	83	48	91

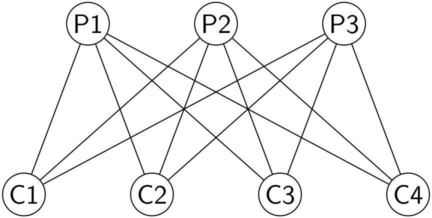
	C1	C2	C3	C4
P1	132	200	97	103
P2	85	91	182	210
P3	106	89	100	98

このように，2 つに「分けられる」ようなグラフを二部グラフと呼ぶ

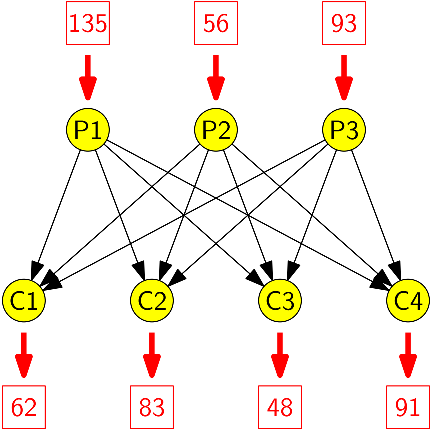
ここからの目標

ここからの目標

この問題を最小費用流問題として定式化する



最小費用流問題としての定式化

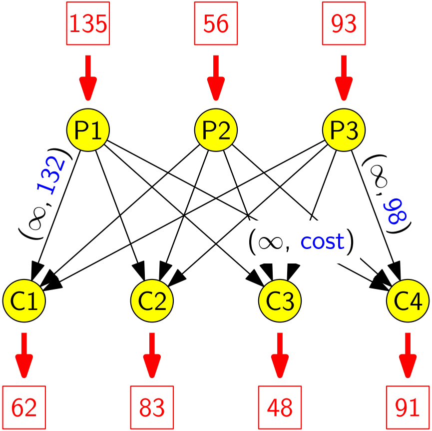


生産者	P1	P2	P3	
生産量	135	56	93	
消費者	C1	C2	C3	C4
消費量	62	83	48	91

	C1	C2	C3	C4
P1	132	200	97	103
P2	85	91	182	210
P3	106	89	100	98

最小費用流問題としての定式化

辺の容量はどれも ∞

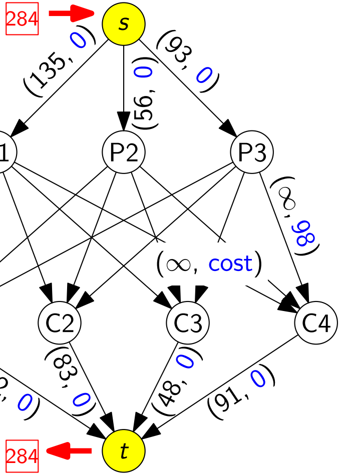


生産者	P1	P2	P3	
生産量	135	56	93	
消費者	C1	C2	C3	C4
消費量	62	83	48	91

	C1	C2	C3	C4
P1	132	200	97	103
P2	85	91	182	210
P3	106	89	100	98

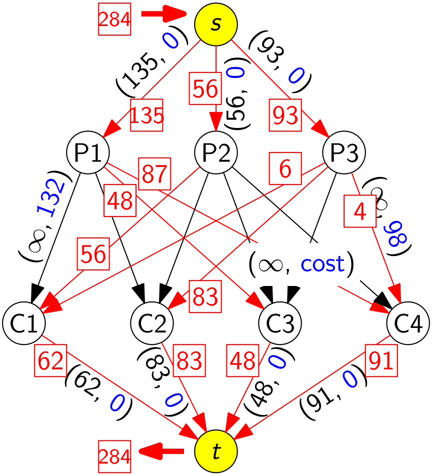
最小費用流問題としての定式化

最終的に得られた定式化



最小費用流問題としての定式化：最適解

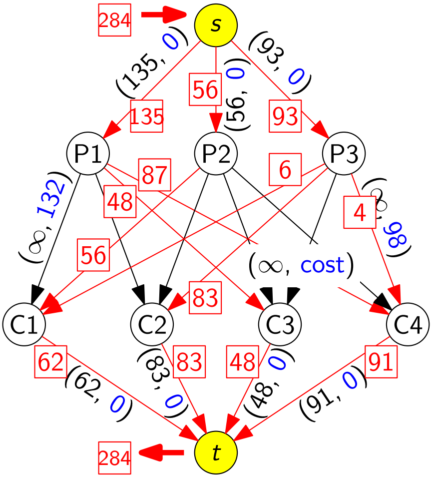
最小費用流



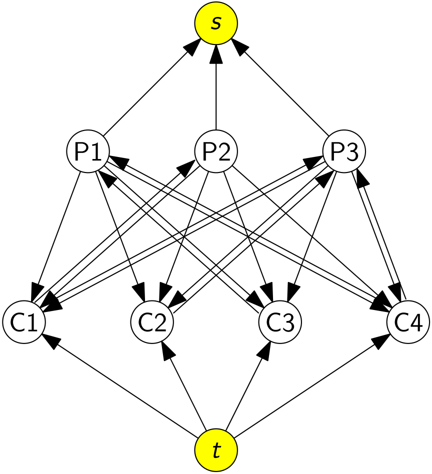
この流れが最小費用流であることを，ポテンシャルによって証明する

最小費用流問題としての定式化：ポテンシャルによる最適性証明

最小費用流



補助ネットワーク (容量・費用は省略)

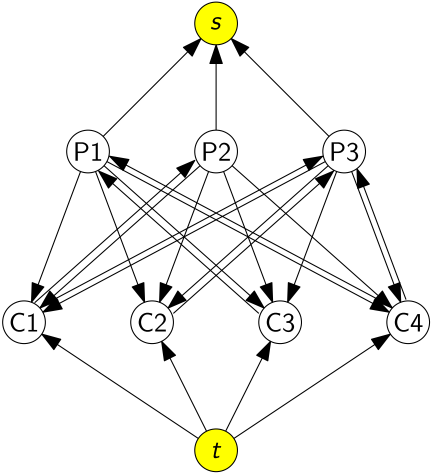


復習：辺の費用 − 始点のポテンシャル ＋ 終点のポテンシャル ≥ 0

ポテンシャルの計算

頂点 v のポテンシャルを p_v と書くと

- $0 - p_{P1} + p_s \geq 0$
- $0 - p_{P2} + p_s \geq 0$
- $0 - p_{P3} + p_s \geq 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \geq 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \geq 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \geq 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \geq 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \geq 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \geq 0$
- $\cdots$



復習：辺の費用 $-$ 始点のポテンシャル $+$ 終点のポテンシャル ≥ 0

ポテンシャルの計算：全部書き下す

頂点 v のポテンシャルを p_v と書くと (ただし，$p_s = 0$)

- $0 - p_{P1} + p_s \geq 0$
- $0 - p_{P2} + p_s \geq 0$
- $0 - p_{P3} + p_s \geq 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \geq 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \geq 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \geq 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \geq 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \geq 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \geq 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \geq 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \geq 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \geq 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \geq 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \geq 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \geq 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \geq 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \geq 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \geq 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \geq 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \geq 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C1} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C2} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C4} \geq 0$

ポテンシャルの計算：頑張って解く

頂点 v のポテンシャルを p_v と書くと (ただし，$p_s = 0$)

- $0 - p_{P1} + p_s \geq 0$
- $0 - p_{P2} + p_s \geq 0$
- $0 - p_{P3} + p_s \geq 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \geq 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \geq 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \geq 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \geq 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \geq 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \geq 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \geq 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \geq 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \geq 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \geq 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \geq 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \geq 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \geq 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \geq 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \geq 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \geq 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \geq 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C1} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C2} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C4} \geq 0$

$p_s = 0$, $p_{P1} =$, $p_{P2} =$, $p_{P3} =$, $p_{C1} =$, $p_{C2} =$,
$p_{C3} =$, $p_{C4} =$, $p_t =$

ポテンシャルの計算：頑張って解く

頂点 v **のポテンシャルを** p_v **と書くと** (**ただし，**$p_s = 0$)

- $p_{P1} \le 0$
- $p_{P2} \le 0$
- $p_{P3} \le 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \ge 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \ge 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \ge 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \ge 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \ge 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \ge 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \ge 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \ge 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \ge 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \ge 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \ge 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \ge 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \ge 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \ge 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \ge 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \ge 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \ge 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C1} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C2} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C3} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C4} \ge 0$

$p_s = 0$, $p_{P1} =$, $p_{P2} =$, $p_{P3} =$, $p_{C1} =$, $p_{C2} =$,
$p_{C3} =$, $p_{C4} =$, $p_t =$

ポテンシャルの計算：頑張って解く

頂点 v のポテンシャルを p_v と書くと (ただし，$p_s = 0$)

- $p_{P1} \leq 0$
- $p_{P2} \leq 0$
- $p_{P3} \leq 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \geq 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \geq 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \geq 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \geq 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \geq 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \geq 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \geq 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \geq 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \geq 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \geq 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \geq 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \geq 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \geq 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \geq 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \geq 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \geq 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \geq 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C1} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C2} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C4} \geq 0$

$p_s = 0$, $p_{P1} = 0$, $p_{P2} =$, $p_{P3} =$, $p_{C1} =$, $p_{C2} =$,
$p_{C3} =$, $p_{C4} =$, $p_t =$

ポテンシャルの計算：頑張って解く

頂点 v のポテンシャルを p_v と書くと (ただし，$p_s = 0$)

- $p_{P1} \leq 0$
- $p_{P2} \leq 0$
- $p_{P3} \leq 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \geq 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \geq 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \geq 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \geq 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \geq 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \geq 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \geq 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \geq 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \geq 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \geq 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \geq 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \geq 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \geq 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \geq 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \geq 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \geq 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \geq 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C1} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C2} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C4} \geq 0$

$p_s = 0$, $p_{P1} = 0$, $p_{P2} =$, $p_{P3} =$, $p_{C1} =$, $p_{C2} =$,
$p_{C3} =$, $p_{C4} =$, $p_t =$

ポテンシャルの計算：頑張って解く

頂点 v のポテンシャルを p_v と書くと (ただし，$p_s = 0$)

- $p_{P1} \leq 0$
- $p_{P2} \leq 0$
- $p_{P3} \leq 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \geq 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \geq 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \geq 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \geq 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \geq 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \geq 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \geq 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \geq 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \geq 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \geq 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \geq 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \geq 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \geq 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \geq 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \geq 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \geq 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \geq 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C1} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C2} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C4} \geq 0$

$p_s = 0$, $p_{P1} = 0$, $p_{P2} =$, $p_{P3} =$, $p_{C1} =$, $p_{C2} =$,
$p_{C3} = -97$, $p_{C4} =$, $p_t =$

ポテンシャルの計算：頑張って解く

頂点 v のポテンシャルを p_v と書くと (ただし，$p_s = 0$)

- $p_{P1} \le 0$
- $p_{P2} \le 0$
- $p_{P3} \le 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \ge 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \ge 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \ge 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \ge 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \ge 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \ge 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \ge 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \ge 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \ge 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \ge 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \ge 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \ge 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \ge 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \ge 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \ge 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \ge 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \ge 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C1} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C2} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C3} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C4} \ge 0$

$p_s = 0$, $p_{P1} = 0$, $p_{P2} =$, $p_{P3} =$, $p_{C1} =$, $p_{C2} =$,
$p_{C3} = -97$, $p_{C4} =$, $p_t =$

ポテンシャルの計算：頑張って解く

頂点 v のポテンシャルを p_v と書くと (ただし，$p_s = 0$)

- $p_{P1} \leq 0$
- $p_{P2} \leq 0$
- $p_{P3} \leq 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \geq 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \geq 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \geq 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \geq 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \geq 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \geq 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \geq 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \geq 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \geq 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \geq 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \geq 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \geq 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \geq 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \geq 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \geq 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \geq 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \geq 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C1} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C2} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C4} \geq 0$

$p_s = 0$, $p_{P1} = 0$, $p_{P2} =$, $p_{P3} =$, $p_{C1} =$, $p_{C2} =$,
$p_{C3} = -97$, $p_{C4} = -103$, $p_t =$

ポテンシャルの計算：頑張って解く

頂点 v のポテンシャルを p_v と書くと (ただし，$p_s = 0$)

- $p_{P1} \le 0$
- $p_{P2} \le 0$
- $p_{P3} \le 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \ge 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \ge 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \ge 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \ge 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \ge 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \ge 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \ge 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \ge 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \ge 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \ge 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \ge 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \ge 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \ge 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \ge 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \ge 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \ge 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \ge 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C1} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C2} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C3} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C4} \ge 0$

$p_s = 0$, $p_{P1} = 0$, $p_{P2} =$, $p_{P3} =$, $p_{C1} =$, $p_{C2} =$,
$p_{C3} = -97$, $p_{C4} = -103$, $p_t =$

ポテンシャルの計算：頑張って解く

頂点 v のポテンシャルを p_v と書くと (ただし，$p_s = 0$)

- $p_{P1} \leq 0$
- $p_{P2} \leq 0$
- $p_{P3} \leq 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \geq 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \geq 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \geq 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \geq 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \geq 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \geq 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \geq 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \geq 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \geq 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \geq 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \geq 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \geq 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \geq 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \geq 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \geq 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \geq 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \geq 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C1} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C2} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C4} \geq 0$

$p_s = 0$, $p_{P1} = 0$, $p_{P2} =$, $p_{P3} = -5$, $p_{C1} =$, $p_{C2} =$,
$p_{C3} = -97$, $p_{C4} = -103$, $p_t =$

ポテンシャルの計算：頑張って解く

頂点 v のポテンシャルを p_v と書くと (ただし，$p_s = 0$)

- $p_{P1} \le 0$
- $p_{P2} \le 0$
- $p_{P3} \le 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \ge 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \ge 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \ge 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \ge 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \ge 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \ge 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \ge 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \ge 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \ge 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \ge 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \ge 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \ge 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \ge 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \ge 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \ge 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \ge 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \ge 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C1} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C2} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C3} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C4} \ge 0$

$p_s = 0,\ p_{P1} = 0,\ p_{P2} = \qquad ,\ p_{P3} = -5,\ p_{C1} = \qquad ,\ p_{C2} = \qquad ,$
$p_{C3} = -97,\ p_{C4} = -103,\ p_t =$

ポテンシャルの計算：頑張って解く

頂点 v **のポテンシャルを** p_v **と書くと (ただし，**$p_s = 0$)

- $p_{P1} \leq 0$
- $p_{P2} \leq 0$
- $p_{P3} \leq 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \geq 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \geq 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \geq 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \geq 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \geq 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \geq 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \geq 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \geq 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \geq 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \geq 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \geq 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \geq 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \geq 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \geq 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \geq 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \geq 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \geq 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C1} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C2} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C4} \geq 0$

$p_s = 0$, $p_{P1} = 0$, $p_{P2} =$, $p_{P3} = -5$, $p_{C1} = -111$, $p_{C2} =$,
$p_{C3} = -97$, $p_{C4} = -103$, $p_t =$

ポテンシャルの計算：頑張って解く

頂点 v のポテンシャルを p_v と書くと (ただし，$p_s = 0$)

- $p_{P1} \leq 0$
- $p_{P2} \leq 0$
- $p_{P3} \leq 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \geq 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \geq 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \geq 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \geq 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \geq 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \geq 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \geq 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \geq 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \geq 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \geq 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \geq 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \geq 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \geq 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \geq 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \geq 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \geq 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \geq 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C1} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C2} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C4} \geq 0$

$p_s = 0$, $p_{P1} = 0$, $p_{P2} =$, $p_{P3} = -5$, $p_{C1} = -111$, $p_{C2} =$,
$p_{C3} = -97$, $p_{C4} = -103$, $p_t =$

ポテンシャルの計算：頑張って解く

頂点 v のポテンシャルを p_v と書くと (ただし，$p_s = 0$)

- $p_{P1} \leq 0$
- $p_{P2} \leq 0$
- $p_{P3} \leq 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \geq 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \geq 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \geq 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \geq 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \geq 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \geq 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \geq 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \geq 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \geq 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \geq 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \geq 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \geq 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \geq 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \geq 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \geq 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \geq 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \geq 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C1} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C2} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C4} \geq 0$

$p_s = 0,\ p_{P1} = 0,\ p_{P2} = -26,\ p_{P3} = -5,\ p_{C1} = -111,\ p_{C2} = \quad ,$
$p_{C3} = -97,\ p_{C4} = -103,\ p_t =$

ポテンシャルの計算：頑張って解く

頂点 v のポテンシャルを p_v と書くと (ただし，$p_s = 0$)

- $p_{P1} \leq 0$
- $p_{P2} \leq 0$
- $p_{P3} \leq 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \geq 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \geq 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \geq 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \geq 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \geq 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \geq 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \geq 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \geq 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \geq 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \geq 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \geq 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \geq 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \geq 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \geq 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \geq 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \geq 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \geq 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C1} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C2} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C4} \geq 0$

$p_s = 0,\ p_{P1} = 0,\ p_{P2} = -26,\ p_{P3} = -5,\ p_{C1} = -111,\ p_{C2} = \quad ,$
$p_{C3} = -97,\ p_{C4} = -103,\ p_t =$

ポテンシャルの計算：頑張って解く

頂点 v のポテンシャルを p_v と書くと (ただし，$p_s = 0$)

- $p_{P1} \le 0$
- $p_{P2} \le 0$
- $p_{P3} \le 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \ge 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \ge 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \ge 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \ge 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \ge 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \ge 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \ge 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \ge 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \ge 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \ge 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \ge 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \ge 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \ge 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \ge 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \ge 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \ge 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \ge 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C1} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C2} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C3} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C4} \ge 0$

$p_s = 0,\ p_{P1} = 0,\ p_{P2} = -26,\ p_{P3} = -5,\ p_{C1} = -111,\ p_{C2} = -94,$
$p_{C3} = -97,\ p_{C4} = -103,\ p_t =$

ポテンシャルの計算：頑張って解く

頂点 v **のポテンシャルを** p_v **と書くと (ただし，** $p_s = 0$)

- $p_{P1} \leq 0$
- $p_{P2} \leq 0$
- $p_{P3} \leq 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \geq 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \geq 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \geq 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \geq 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \geq 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \geq 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \geq 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \geq 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \geq 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \geq 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \geq 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \geq 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \geq 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \geq 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \geq 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \geq 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \geq 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C1} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C2} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C3} \geq 0$
- $0 - p_t + p_{C4} \geq 0$

$p_s = 0$, $p_{P1} = 0$, $p_{P2} = -26$, $p_{P3} = -5$, $p_{C1} = -111$, $p_{C2} = -94$, $p_{C3} = -97$, $p_{C4} = -103$, $p_t =$

ポテンシャルの計算：頑張って解く

頂点 v のポテンシャルを p_v と書くと (ただし，$p_s = 0$)

- $p_{P1} \le 0$
- $p_{P2} \le 0$
- $p_{P3} \le 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \ge 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \ge 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \ge 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \ge 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \ge 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \ge 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \ge 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \ge 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \ge 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \ge 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \ge 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \ge 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \ge 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \ge 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \ge 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \ge 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \ge 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C1} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C2} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C3} \ge 0$
- $0 - p_t + p_{C4} \ge 0$

$p_s = 0,\ p_{P1} = 0,\ p_{P2} = -26,\ p_{P3} = -5,\ p_{C1} = -111,\ p_{C2} = -94,$
$p_{C3} = -97,\ p_{C4} = -103,\ p_t =$

ポテンシャルの計算：頑張って解く

頂点 v のポテンシャルを p_v と書くと (ただし，$p_s = 0$)

- $p_{P1} \leq 0$
- $p_{P2} \leq 0$
- $p_{P3} \leq 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \geq 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \geq 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \geq 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \geq 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \geq 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \geq 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \geq 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \geq 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \geq 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \geq 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \geq 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \geq 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \geq 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \geq 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \geq 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \geq 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \geq 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \geq 0$
- $p_t \leq p_{C1}$
- $p_t \leq p_{C2}$
- $p_t \leq p_{C3}$
- $p_t \leq p_{C4}$

$p_s = 0$, $p_{P1} = 0$, $p_{P2} = -26$, $p_{P3} = -5$, $p_{C1} = -111$, $p_{C2} = -94$, $p_{C3} = -97$, $p_{C4} = -103$, $p_t =$

ポテンシャルの計算：頑張って解く

頂点 v のポテンシャルを p_v と書くと (ただし，$p_s = 0$)

- $p_{P1} \le 0$
- $p_{P2} \le 0$
- $p_{P3} \le 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \ge 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \ge 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \ge 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \ge 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \ge 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \ge 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \ge 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \ge 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \ge 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \ge 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \ge 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \ge 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \ge 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \ge 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \ge 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \ge 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \ge 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \ge 0$
- $p_t \le p_{C1}$
- $p_t \le p_{C2}$
- $p_t \le p_{C3}$
- $p_t \le p_{C4}$

$p_s = 0$, $p_{P1} = 0$, $p_{P2} = -26$, $p_{P3} = -5$, $p_{C1} = -111$, $p_{C2} = -94$, $p_{C3} = -97$, $p_{C4} = -103$, $p_t = -111$

ポテンシャルの計算：頑張って解く

頂点 v **のポテンシャルを** p_v **と書くと**（**ただし，**$p_s = 0$）

- $p_{P1} \leq 0$
- $p_{P2} \leq 0$
- $p_{P3} \leq 0$
- $132 - p_{P1} + p_{C1} \geq 0$
- $200 - p_{P1} + p_{C2} \geq 0$
- $97 - p_{P1} + p_{C3} \geq 0$
- $-97 - p_{C3} + p_{P1} \geq 0$
- $103 - p_{P1} + p_{C4} \geq 0$
- $-103 - p_{C4} + p_{P1} \geq 0$
- $85 - p_{P2} + p_{C1} \geq 0$
- $-85 - p_{C1} + p_{P2} \geq 0$
- $91 - p_{P2} + p_{C2} \geq 0$
- $182 - p_{P2} + p_{C3} \geq 0$
- $210 - p_{P2} + p_{C4} \geq 0$
- $106 - p_{P3} + p_{C1} \geq 0$
- $-106 - p_{C1} + p_{P3} \geq 0$
- $89 - p_{P3} + p_{C2} \geq 0$
- $-89 - p_{C2} + p_{P3} \geq 0$
- $100 - p_{P3} + p_{C3} \geq 0$
- $98 - p_{P3} + p_{C4} \geq 0$
- $-98 - p_{C4} + p_{P3} \geq 0$
- $p_t \leq p_{C1}$
- $p_t \leq p_{C2}$
- $p_t \leq p_{C3}$
- $p_t \leq p_{C4}$

$p_s = 0$, $p_{P1} = 0$, $p_{P2} = -26$, $p_{P3} = -5$, $p_{C1} = -111$, $p_{C2} = -94$, $p_{C3} = -97$, $p_{C4} = -103$, $p_t = -111$ **解けた！**

目次

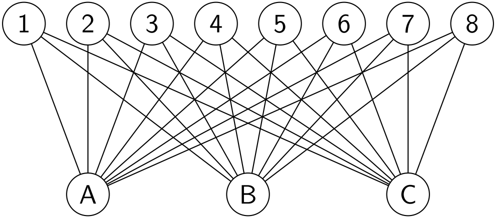
例：オアシスでの救護

- 砂漠で遭難した人々をオアシスで救護したい
- 遭難者は携帯電話によって決められた場所まで歩くよう誘導できる
- 遭難者は 8 人，オアシスは 3 か所
- 各オアシスに対して，各遭難者までの距離と救護可能人数は次の通り
- [問] 遭難者の歩く距離の和が最小となるようにに全員救護するにはどうすればよいか？

距離 (km)	遭難者 1	2	3	4	5	6	7	8	救護可能人数 (人)
オアシス A	3	2	1	3	4	2	4	1	3
オアシス B	1	1	1	5	1	1	2	3	3
オアシス C	2	4	4	2	4	2	1	2	4

グラフを使って状況整理

- 上側：遭難者，下側：オアシス
- 辺：オアシスと遭難者の間



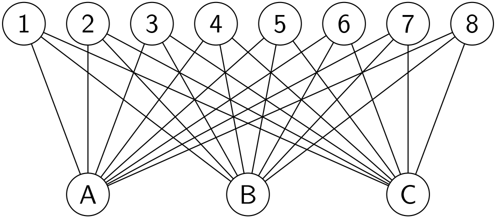
距離 (km)	遭難者 1	2	3	4	5	6	7	8	救護可能人数 (人)
オアシス A	3	2	1	3	4	2	4	1	3
オアシス B	1	1	1	5	1	1	2	3	3
オアシス C	2	4	4	2	4	2	1	2	4

このように，2 つに「分けられる」ようなグラフを**二部グラフ**と呼ぶ

ここからの目標

ここからの目標

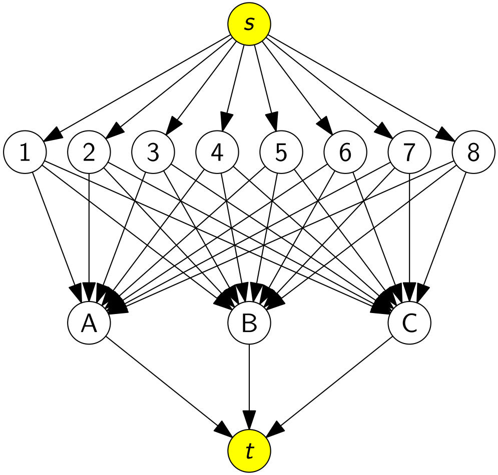
この問題を最小費用流問題として定式化する



着眼点：費用 ＝ 歩く距離

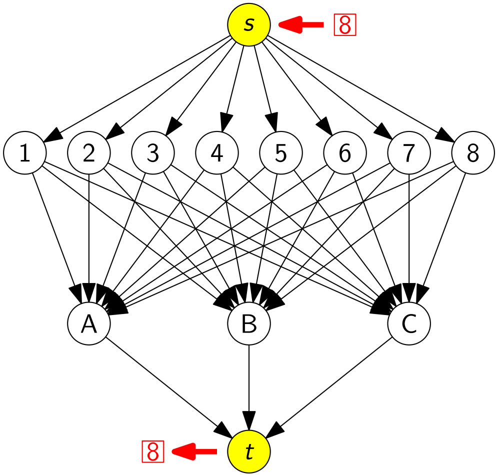
最小費用流問題問題としての定式化

s と t を新しい頂点として用意して，このように辺を作る



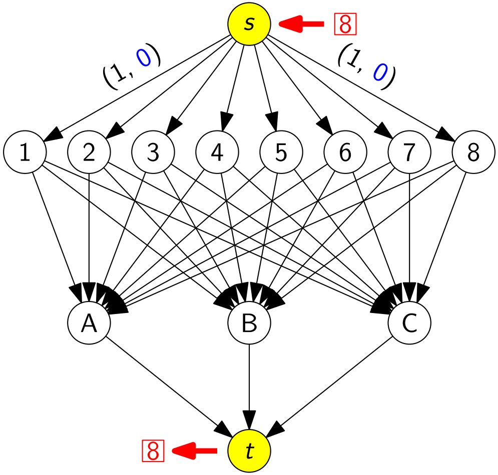
最小費用流問題問題としての定式化

s から流出する量は 8 (遭難者数)



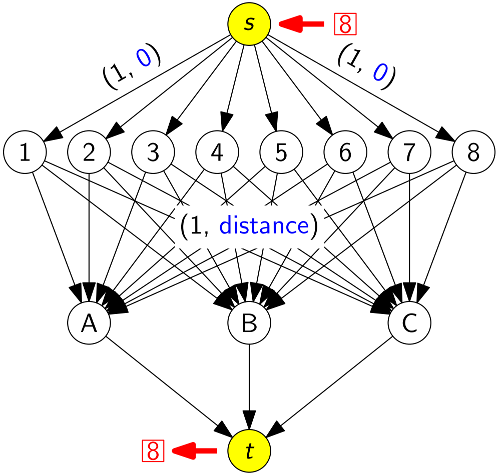
最小費用流問題問題としての定式化

s と遭難者の間の辺容量はどれも 1，費用はどれも 0



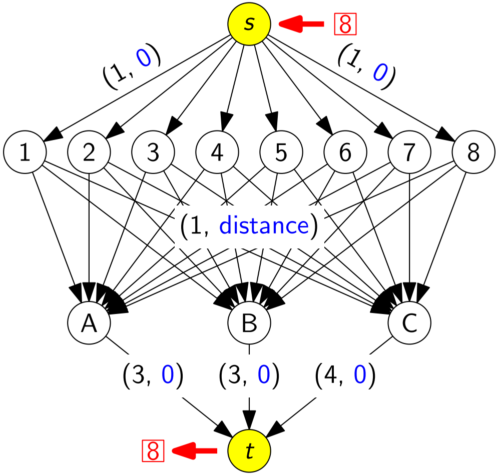
最小費用流問題問題としての定式化

遭難者とオアシスの間の辺容量はどれも 1，費用は対応する距離

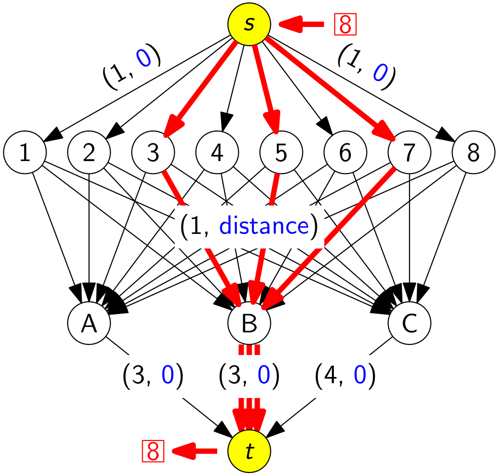


最小費用流問題問題としての定式化

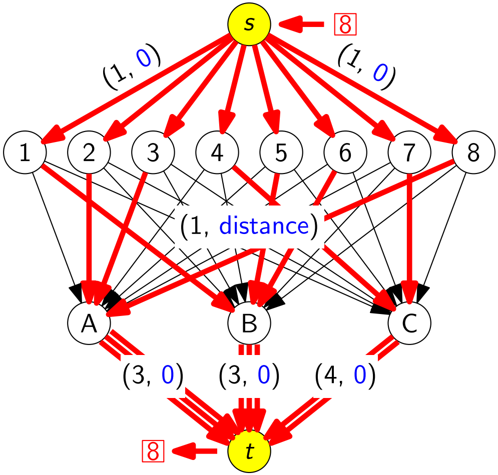
オアシスと t の間の辺容量はオアシスの救護可能人数，費用はどれも 0



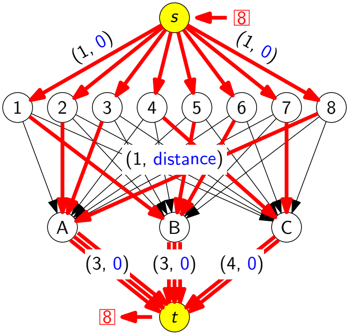
直感：オアシス B で遭難者 3，5，7 を救護してる様子



最適解



最適解と最適値



最適値は $2+1+1+1+1+1+2+1=10$

距離 (km)	遭難者 1	2	3	4	5	6	7	8	救護可能人数 (人)
オアシス A	3	**2**	**1**	3	4	2	4	**1**	3
オアシス B	**1**	1	1	5	**1**	**1**	2	3	3
オアシス C	2	4	4	**2**	4	2	**1**	2	4

目次

今日のまとめと今後の予告

今日の目標

- 最小費用流問題に対する以下の変種を扱えるようになる
  - 流入頂点と流出頂点が複数ある場合
  - 流量下限がある場合
- 以下の問題を最小費用流問題として定式化できるようになる
  - 輸送問題
  - 割当問題

今後の予告：ネットワークに関わる 3 つの最適化問題

済 最短路問題

済 最大流問題

　済 最大流問題の応用

済 最小費用流問題

- 最小費用流問題の応用 ← 次回も引き続き

注：ネットワークに関わる最適化問題は他にもたくさんある

期末試験

日時

7 月 31 日 (水) 6 限

試験範囲

ネットワーク最適化 (1)〜(7)

- つまり，7 月 26 日の講義で扱う内容は試験で問われない

注意

- 60 点満点で，4 問出題する
- A4 用紙 1 枚 (両面自筆書き込み) は持ち込み可

目次