最適化手法 第 13 回
ネットワーク最適化 (6)：最小費用流問題

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

2013 年 7 月 12 日

最終更新：2013 年 7 月 13 日　23:52

今日の概要

今日の目標

- 最小費用流問題の定義と解法を理解する
- 最小費用流問題を線形計画問題として定式化できるようになる
- 最小費用流問題を逐次最短路法によって解けるようになる
- 最小費用流問題の最適性をポテンシャルによって証明できる

重要な概念：最適性規準，整数流定理

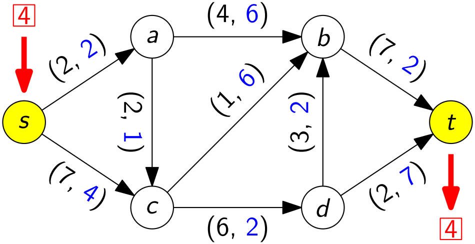
目次

最小費用流問題とは？

最小費用流問題とは？

入力

- 有向グラフ $G = (V, E)$，各辺 $e \in E$ の容量と費用，
  2 頂点 $s, t \in V$，s から t への流量 b
  (辺容量は非負実数，辺費用は負かもしれない実数，流量は非負実数)



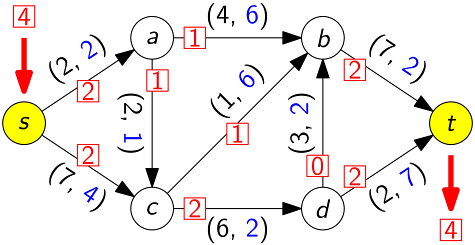
各辺に「(容量, 費用)」が書いてあり，$b = 4$

最小費用流問題とは？

最小費用流問題とは？

出力

- s から t へ至る流れで，その流量が b であり，費用和が最小のもの $\rightsquigarrow$ 費用の測り方は？ (次ページ)



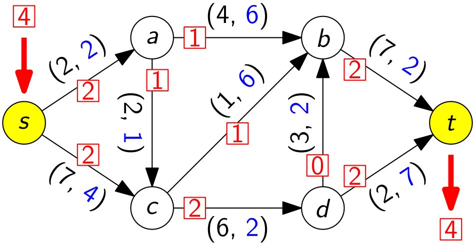
流れの費用とは？

流れの費用とは？

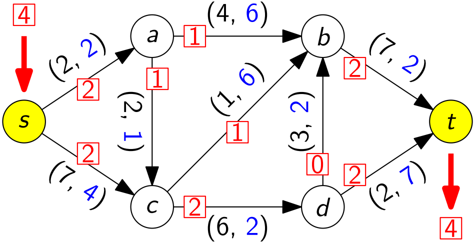
各辺に対して，

- その辺を流れる量 × その辺の費用

を計算して，すべて足したもの



流れの費用：計算例

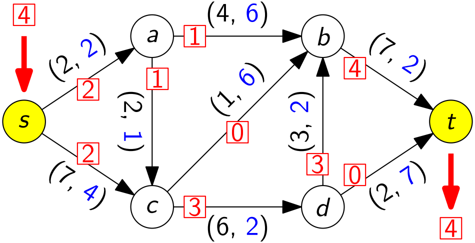


この流れの費用 $= \boxed{2} \times 2 + \boxed{2} \times 4 + \boxed{1} \times 1 + \boxed{1} \times 6 + \boxed{1} \times 6 + \boxed{2} \times 2 + \boxed{0} \times 2 + \boxed{2} \times 2 + \boxed{2} \times 7$

$= 4 + 8 + 1 + 6 + 6 + 4 + 0 + 4 + 14$

$= 47$

流れの費用：計算例 2



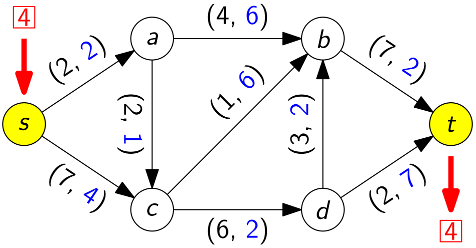
$$\text{この流れの費用} = \boxed{2} \times 2 + \boxed{2} \times 4 + \boxed{1} \times 1 + \boxed{1} \times 6 + \boxed{0} \times 6 + \boxed{3} \times 2 + \boxed{3} \times 2 + \boxed{4} \times 2 + \boxed{0} \times 7$$
$$= 4 + 8 + 1 + 6 + 0 + 6 + 6 + 8 + 0$$
$$= 39$$

(これは最小費用流)

最小費用流問題が出てくる場面：配送問題

- 有向グラフは 道路ネットワーク をモデル化
- s は 部品工場 をモデル化
- t は 組立工場 をモデル化
- 辺の容量は 道幅 をモデル化
- 辺の費用は 輸送費用 をモデル化

最小費用流問題 $=$ できるだけ費用をかけずに部品を運ぶには？



他の応用は後の講義で

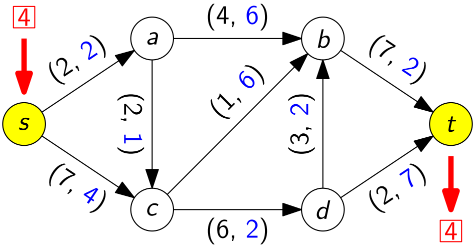
最小費用流問題の解き方

解き方１：線形計画問題として定式化

例えば，単体法を用いて解く

解き方２：最小費用流問題独自のアルゴリズムを利用

例えば，逐次最短路法を用いて解く

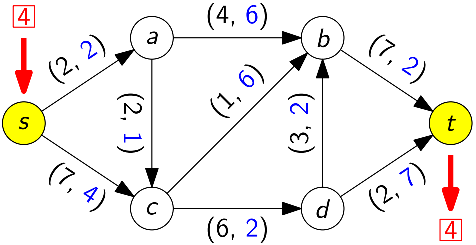


目次

最小費用流問題の解き方

解き方 1：線形計画問題として定式化

例えば，単体法を用いて解く



今からやること

この有向グラフに対する最小費用流問題を線形計画問題として定式化

最適化モデル作成のポイント — 第 2 回の講義から

最適化モデル作成のポイント：基礎

次を明確にする

- 変数は何か？ 何を変数は表すのか？
- 目的関数は何か？ 何を最適化するのか？
- 制約は何か？ 何を制約は表すのか？

最適化モデル作成のポイント：基礎の次

次を心がける

- 「非線形よりも線形」を目指す
- 「整数計画よりも 01 整数計画」を目指す
- 「big-M は使わない」を目指す

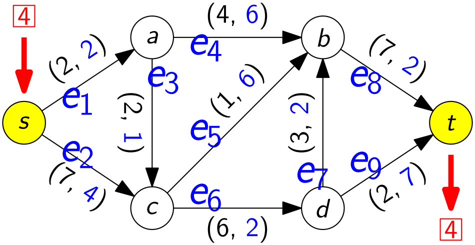
最小費用流問題：変数

決定すべきこと：どの辺にどれだけ流すか (量)

- **各辺** $e_i \in \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$ **に対して**

$$x_i \in \mathbb{R}$$

という変数を設定する
- **解釈：辺** e_i **の上を流れる量が** x_i **である**
- **変数の数** $= 9$ **(辺の数)**



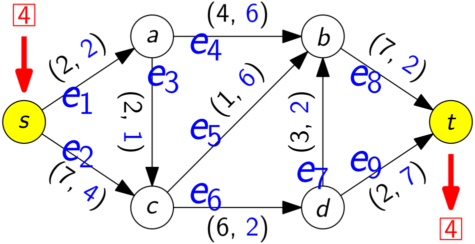
最小費用流問題：目的関数

最適化するもの：費用

- **目的は**

$$\text{最小化}\quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 2x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 7x_9$$

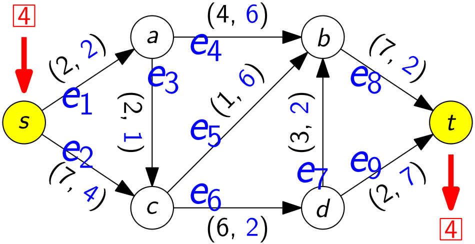
- **解釈：流れの費用**



最小費用流問題：制約 (1)

制約 (1)：容量制約

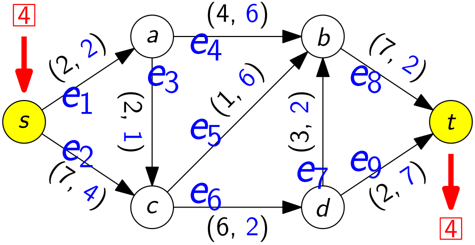
- $0 \leq x_1 \leq 2$
- $0 \leq x_2 \leq 7$
- $0 \leq x_3 \leq 2$
- $0 \leq x_4 \leq 4$
- $0 \leq x_5 \leq 1$
- $0 \leq x_6 \leq 6$
- $0 \leq x_7 \leq 3$
- $0 \leq x_8 \leq 7$
- $0 \leq x_9 \leq 2$



最小費用流問題：制約 (2)

制約 (2)：流量保存制約

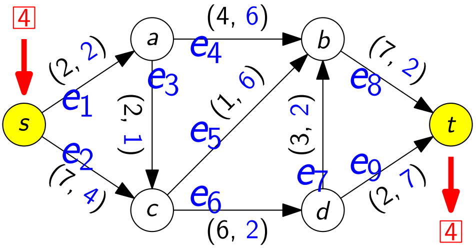
- $x_1 = x_3 + x_4$ (頂点 a に関して)
- $x_4 + x_5 + x_7 = x_8$ (頂点 b に関して)
- $x_2 + x_3 = x_5 + x_6$ (頂点 c に関して)
- $x_6 = x_7 + x_9$ (頂点 d に関して)



最小費用流問題：制約 (2)

制約 (2)：流量保存制約

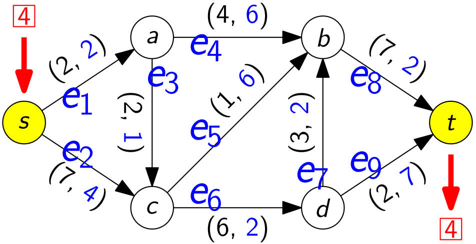
- $x_1 = x_3 + x_4$ (頂点 a に関して)
- $x_4 + x_5 + x_7 = x_8$ (頂点 b に関して)
- $x_2 + x_3 = x_5 + x_6$ (頂点 c に関して)
- $x_6 = x_7 + x_9$ (頂点 d に関して)
- $4 = x_1 + x_2$ (頂点 s に関して)
- $x_8 + x_9 = 4$ (頂点 t に関して)



最小費用流問題：線形計画モデルの完成

最小費用流問題に対する線形計画問題としての定式化

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x}{\textbf{最小化}} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 2x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 7x_9 \\
\textbf{条　件} & x_1 = x_3 + x_4, x_4 + x_5 + x_7 = x_8, x_2 + x_3 = x_5 + x_6, \\
& x_6 = x_7 + x_9, 4 = x_1 + x_2, x_8 + x_9 = 4, \\
& 0 \le x_1 \le 2, 0 \le x_2 \le 7, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 4, 0 \le x_5 \le 1, \\
& 0 \le x_6 \le 6, 0 \le x_7 \le 3, 0 \le x_8 \le 7, 0 \le x_9 \le 2, \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

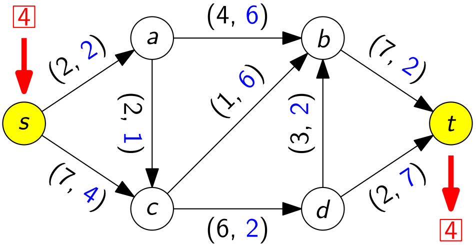


目次

最小費用流問題の解き方

解き方 2：最小費用流問題独自のアルゴリズムを利用

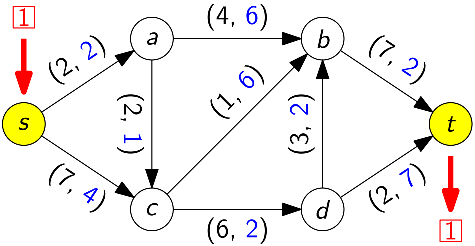
例えば，逐次最短路法を用いて解く



逐次最短路法は最短路繰り返し法，最短路反復法とも呼ばれる

例として，流量が小さい場合を考える

この問題を逐次最短路法で解いてみる

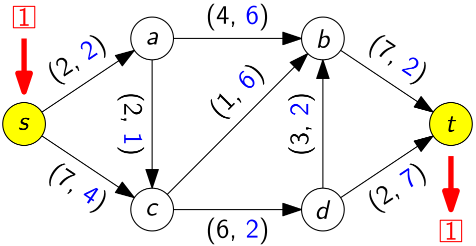


基本的アイディア

費用を最小化したいので，費用の小さい経路に沿って流せばよい

例として，流量が小さい場合を考える

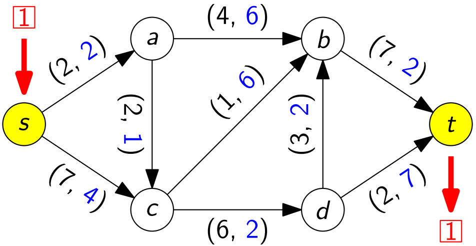
この問題を逐次最短路法で解いてみる

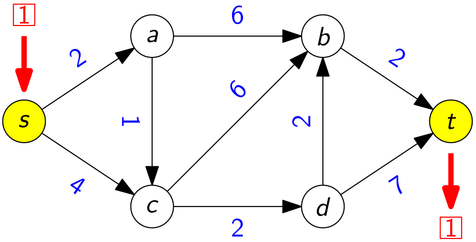


基本的アイディア

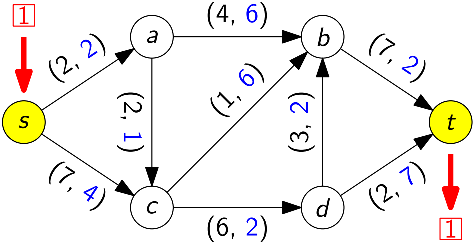
費用を最小化したいので，費用の小さい経路に沿って流せばよい
$\rightsquigarrow$ **最短路問題を解いて経路を見つければよい**
(辺の長さ $=$ 辺の費用)

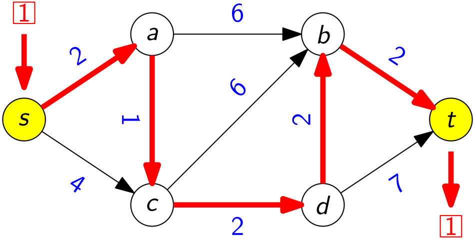
ステップ 1：費用を長さと見なしたグラフを作る





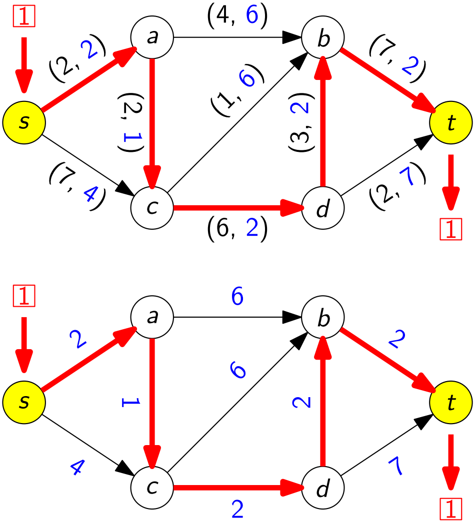
ステップ 2：s を始点，t を終点とする最短路を見つける





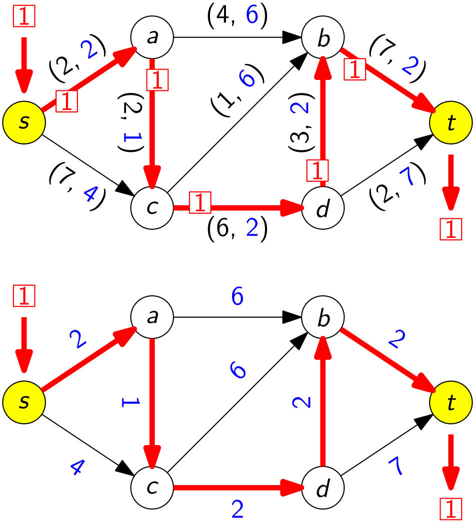
例えば，Dijkstra 法を用いて見つける

ステップ 3：見つけた最短路に沿って流す



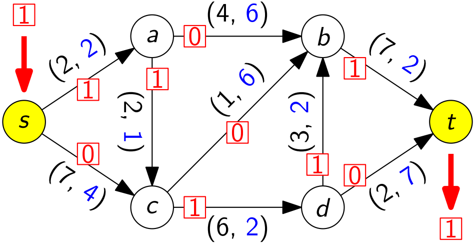
流量が小さいので，容量制約は満たされる

ステップ 3：見つけた最短路に沿って流す



流量が小さいので，容量制約は満たされる

これで解けた！

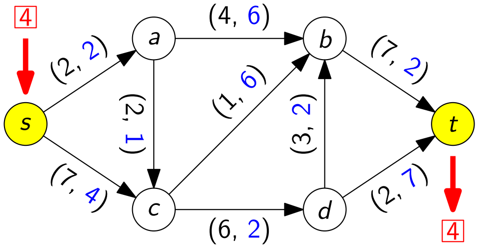


得られた最小費用流

目次

次に，流量が大きい場合を考える

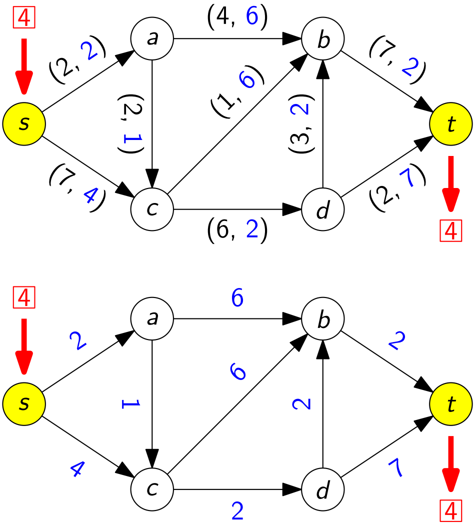
この問題を逐次最短路法で解いてみる



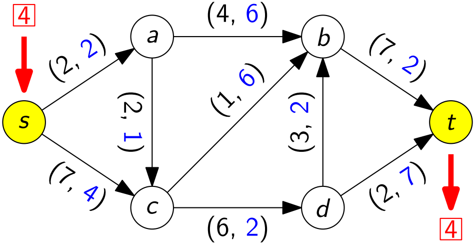
基本的アイディア

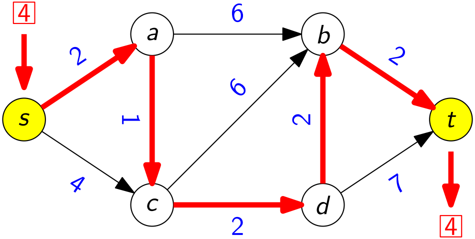
先ほどと同じ考えに従ってみる

ステップ 1：費用を長さと見なしたグラフを作る



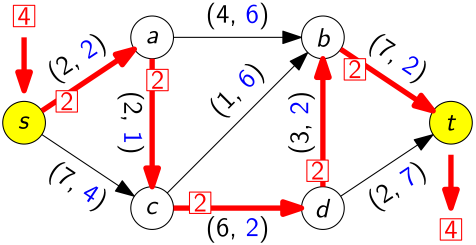
ステップ 2：s を始点，t を終点とする最短路を見つける

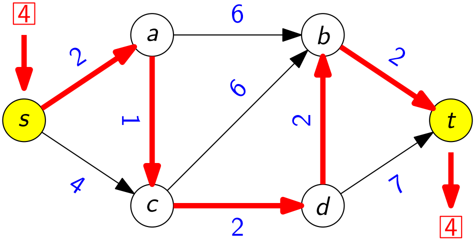




例えば，Dijkstra **法を用いて見つける**

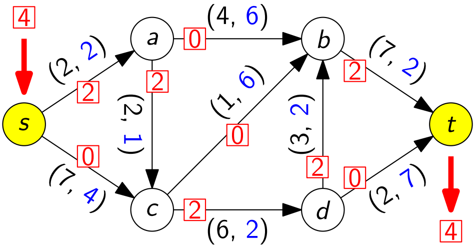
ステップ 3：見つけた最短路に沿って流す





流量が大きいので，すべて流すことはできない

まだ解けていない

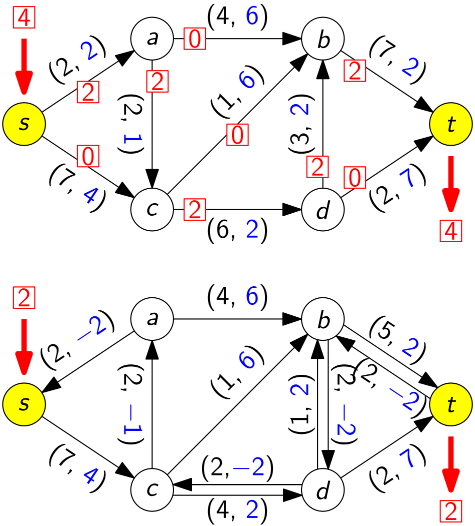


本来の流量は 4 でないといけないが，まだ流量は 2 だけ

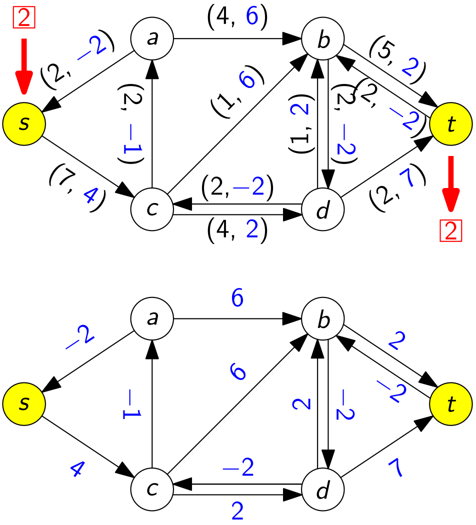
もっと流すためにどうするか？

補助ネットワークを作る (最大流問題のときと同じように)

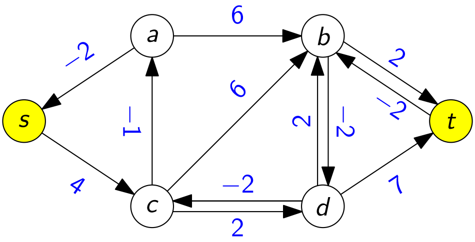
ステップ 0：補助ネットワークを作る



ステップ 1：補助ネットワークから，費用を長さと見なしたグラフを作る



ステップ 2：s を始点，t を終点とする最短路を見つける



問題点：辺長に負の数が出てくるので，Dijkstra 法が適用できない

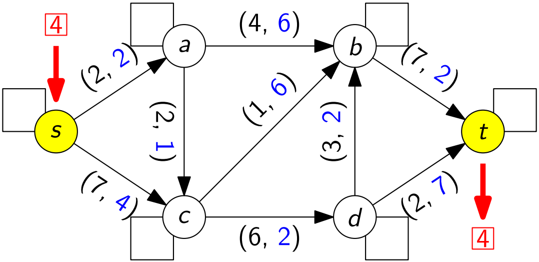
問題点の回避法

「ポテンシャル」を用いて，長さを修正する

目次

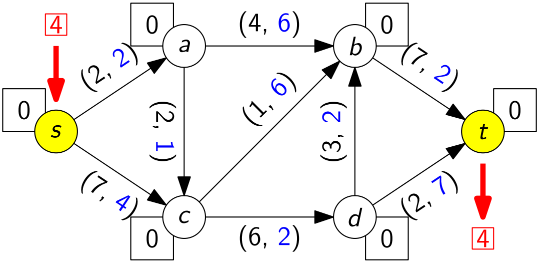
ポテンシャルによる方法

各頂点に「ポテンシャル」と呼ばれる実数を持たせる

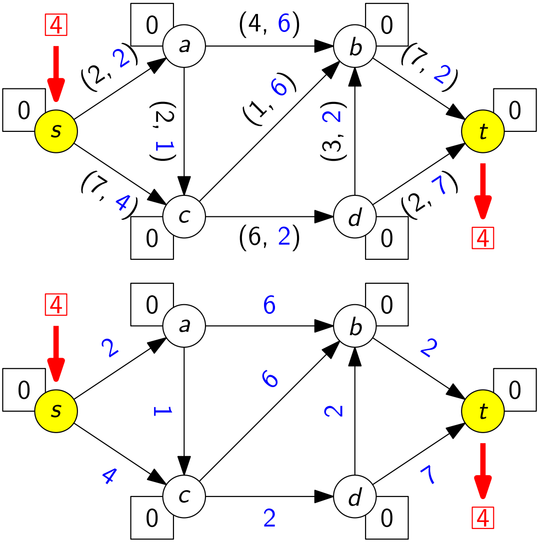


ステップ 0：ポテンシャルの初期化

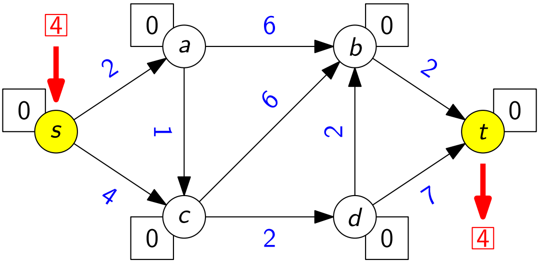
すべての頂点のポテンシャルを 0 で初期化する

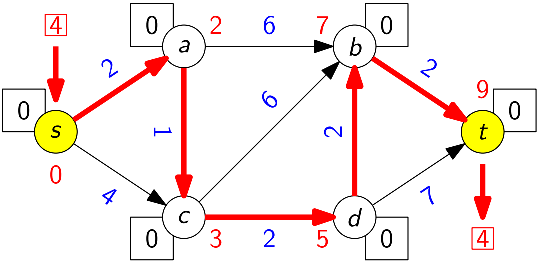


ステップ 1：費用を長さと見なしたグラフを作る



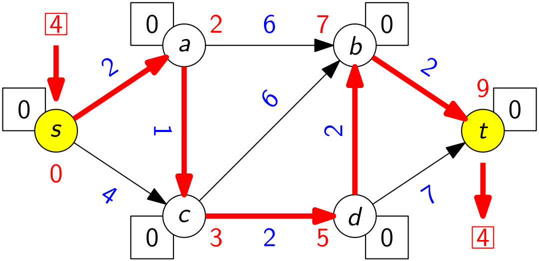
ステップ 2：s から他の頂点への最短路を見つける

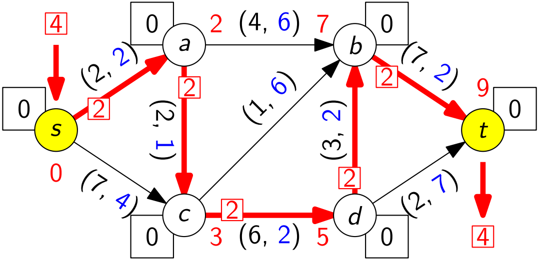




例えば，Dijkstra 法を用いて見つける

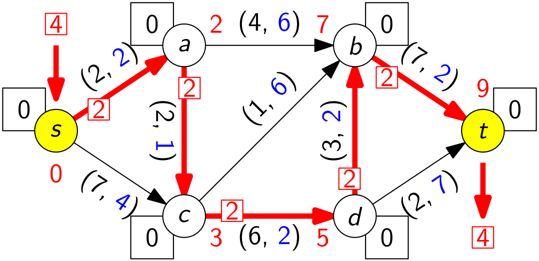
ステップ 3：見つけた最短路に沿って流す

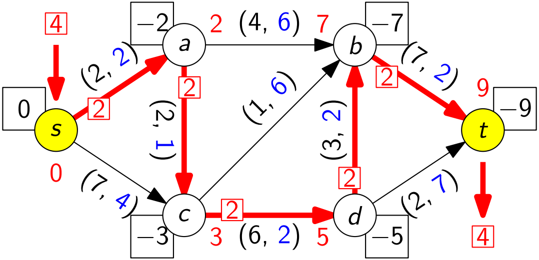




流量が大きいので，すべて流すことはできない

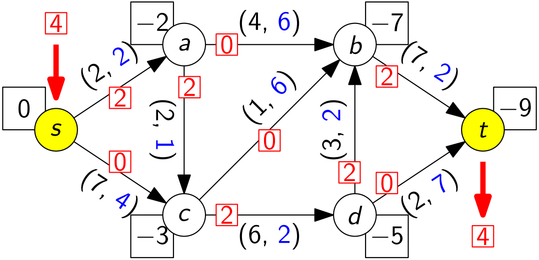
ステップ 4：ポテンシャルの更新





新しいポテンシャル ＝ 古いポテンシャル － 計算した最短路長

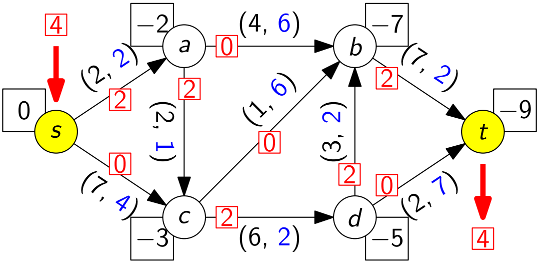
途中経過

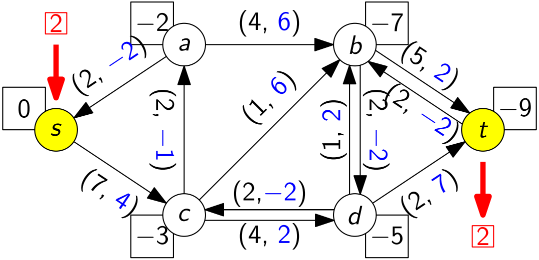


このステップを繰り返す

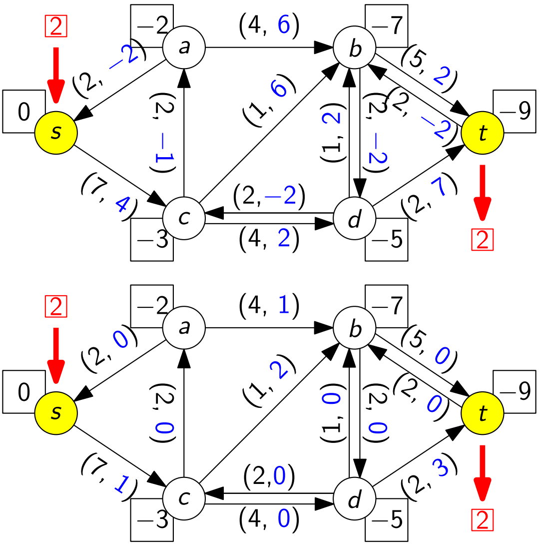
- ただし，次の段階では「補助ネットワーク」と「修正補助ネットワーク」を作る

ステップ 0：補助ネットワークを作る



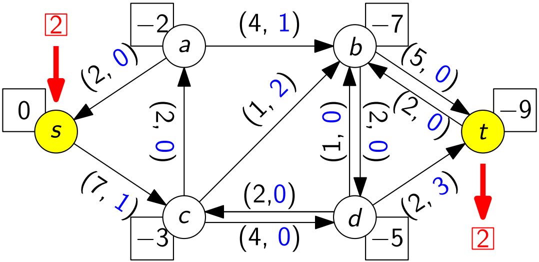


ステップ 0'：修正補助ネットワークを作る



修正後費用 ＝ 修正前費用 − 始点ポテンシャル ＋ 終点ポテンシャル

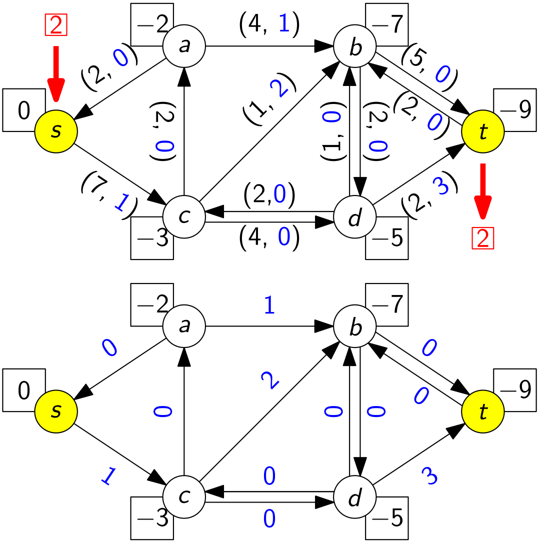
修正補助ネットワークの性質



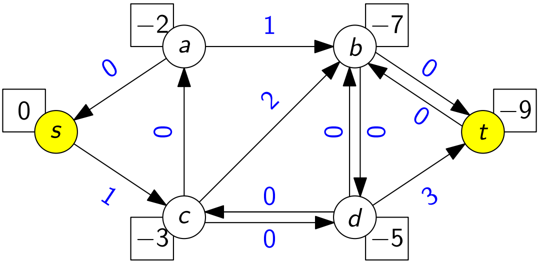
どの辺の費用も必ず非負になる

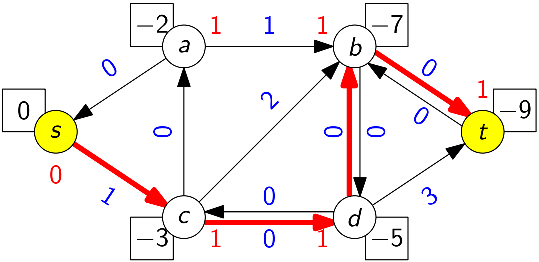
- つまり，ステップ 2 で Dijkstra 法が使えるようになる

ステップ 1：費用を長さと見なしたグラフを作る



ステップ 2：s から他の頂点への最短路を見つける



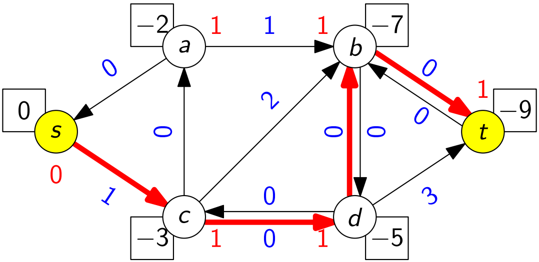


例えば，Dijkstra **法を用いて見つける**

修正補助ネットワークの性質

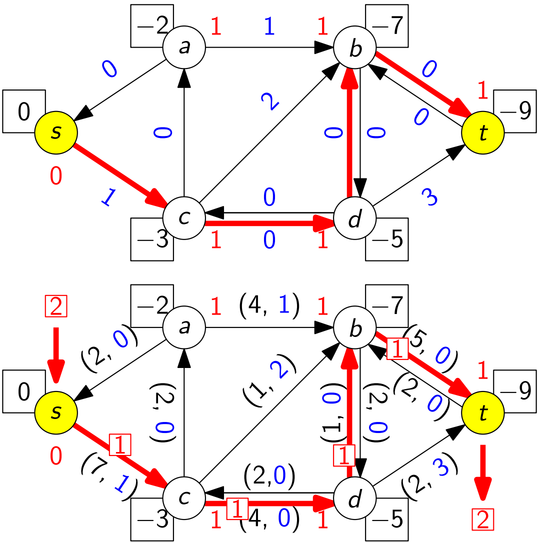
s から t へ至る任意の道に対して

修正補助ネットワークにおける距離	$=$	補助ネットワークにおける距離	$+$	t のポテンシャル



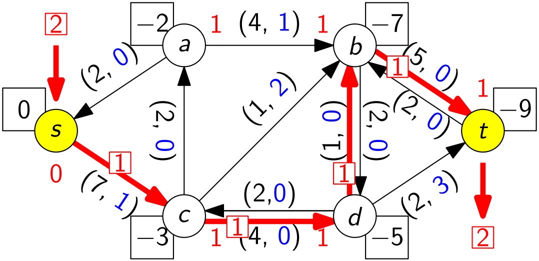
$$
\begin{aligned}
1+0+0+0 &= (4-0+(-3))+(2-(-3)+(-5))+ \\
&\quad (2-(-5)+(-7))+(2-(-7)+(-9)) \\
&= 4+2+2+2+(-9)
\end{aligned}
$$

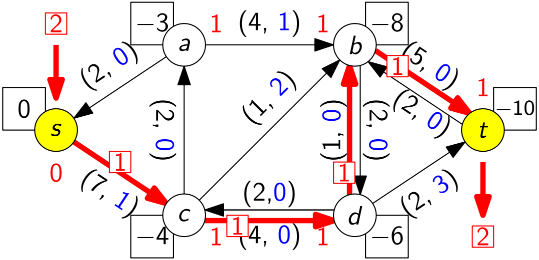
ステップ 3：見つけた最短路に沿って流す



流量が大きいので，すべて流すことはできない

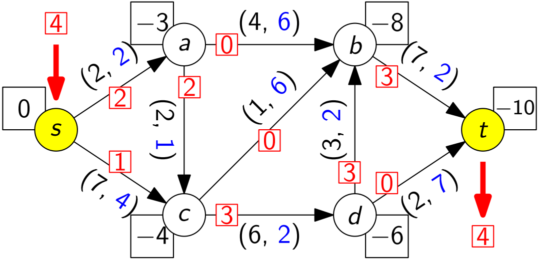
ステップ 4：ポテンシャルの更新





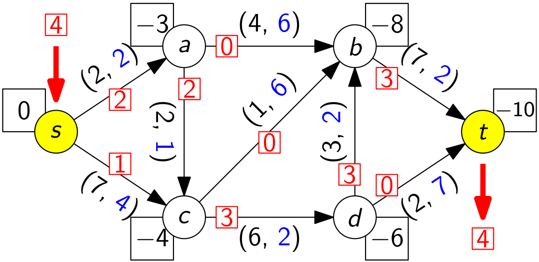
新しいポテンシャル = 古いポテンシャル − 計算した最短路長

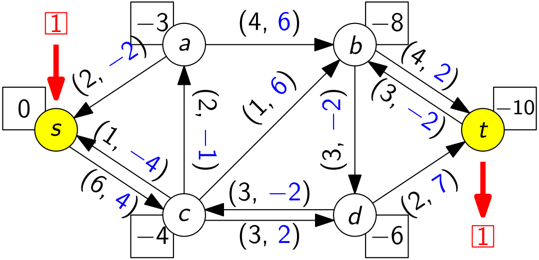
途中経過



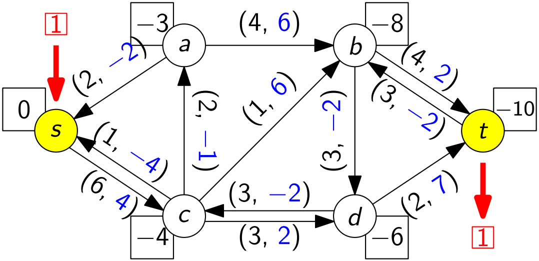
このステップを繰り返す

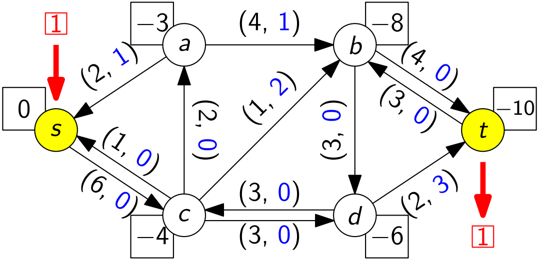
ステップ 0：補助ネットワークを作る





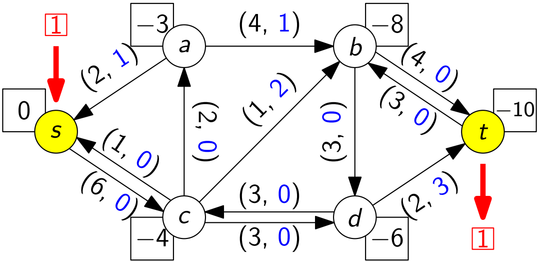
ステップ 0'：修正補助ネットワークを作る

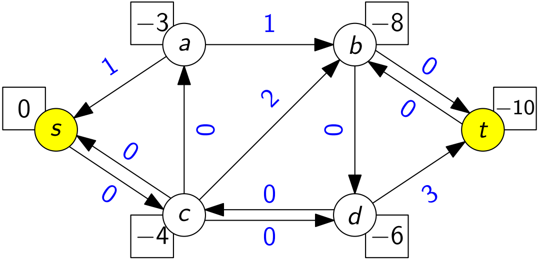




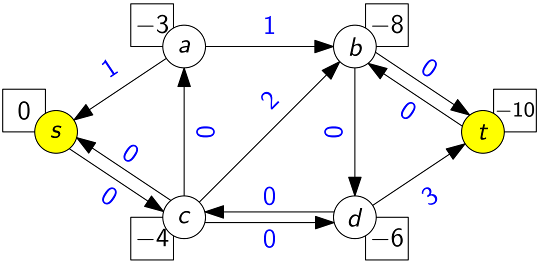
修正後費用 = 修正前費用 − 始点ポテンシャル + 終点ポテンシャル

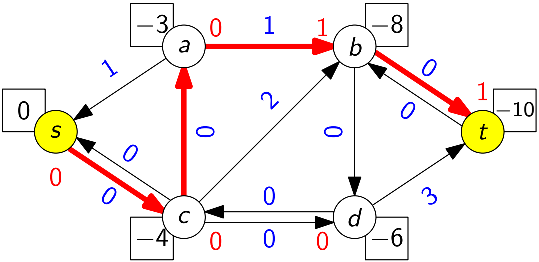
ステップ 1：費用を長さと見なしたグラフを作る





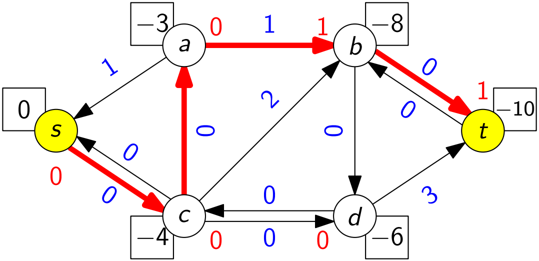
ステップ 2：s から他の頂点への最短路を見つける

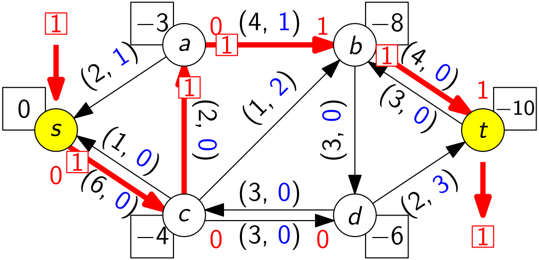




例えば，Dijkstra 法を用いて見つける

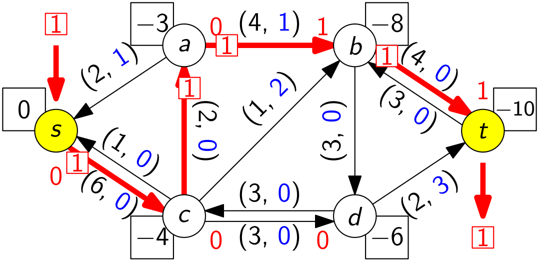
ステップ 3：見つけた最短路に沿って流す

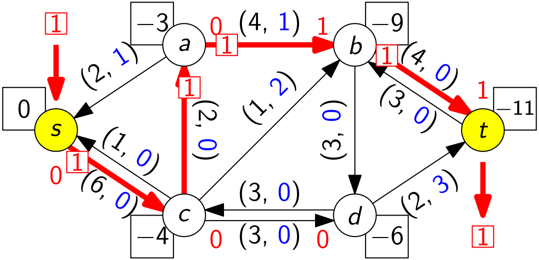




流量が小さいので，すべて流せる！

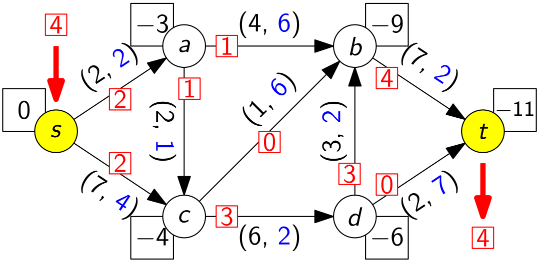
ステップ 4：ポテンシャルの更新





新しいポテンシャル = 古いポテンシャル − 計算した最短路長

最終結果



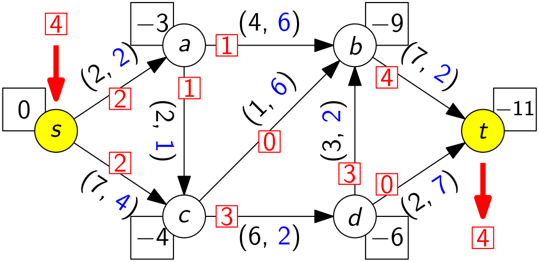
これが最小費用流 (つまり最適解) であり，

この流れの費用 $= \boxed{2} \times 2 + \boxed{2} \times 4 + \boxed{1} \times 1 + \boxed{1} \times 6 + \boxed{0} \times 6 + \boxed{3} \times 2 + \boxed{3} \times 2 + \boxed{4} \times 2 + \boxed{0} \times 7$

$= 4 + 8 + 1 + 6 + 0 + 6 + 6 + 8 + 0$

$= 39$

整数流定理



辺の容量がすべて整数，流量が整数の場合

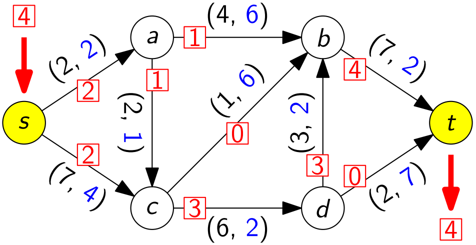
- 補助ネットワークの容量も整数
- ∴ 各辺上の流れ増加量も整数
- ∴ 逐次最短路法が停止したとき，整数流が得られる

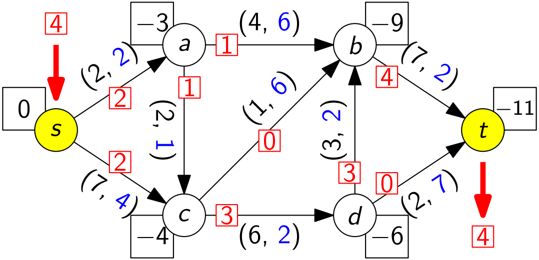
整数流定理

辺の容量がすべて整数で，流量も整数であるとき，
どの辺上の流れも整数であるような最小費用流が存在

目次

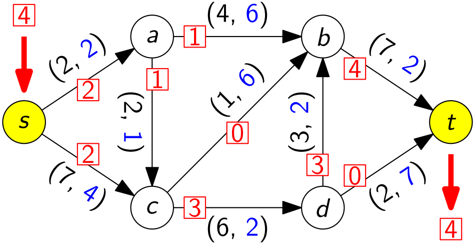
流れからポテンシャルを作る





流れが与えられたとき，そこからポテンシャルを作るには？

流れからポテンシャルを作る (1)



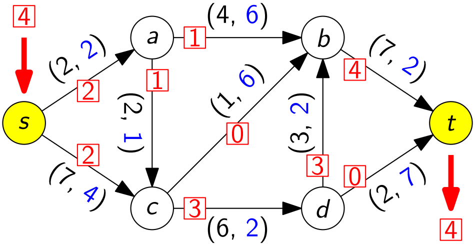
頂点 s, a, b, c, d, t **のポテンシャルをそれぞれ**

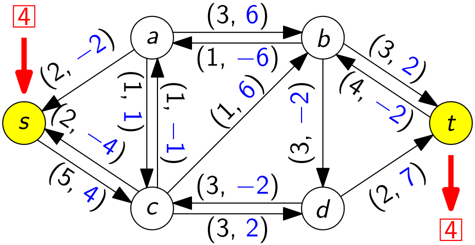
$$p_s, p_a, p_b, p_c, p_d, p_t$$

とする (ただし， $p_s = 0$)

流れからポテンシャルを作る (2)

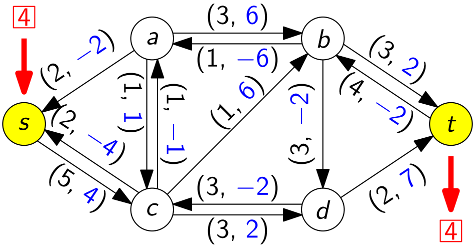
補助ネットワークを作ってみる





流れからポテンシャルを作る (3)

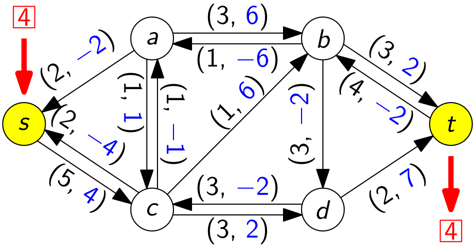
修正前費用 $-$ **始点ポテンシャル** $+$ **終点ポテンシャル** ≥ 0 **なので**



$$-2 - p_a + p_s \geq 0$$

流れからポテンシャルを作る (4)

すべての辺に対して同様に式を立てる



- $-2 - p_a + p_s \geq 0$
- $4 - p_s + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c + p_s \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $6 - p_c + p_b \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $-2 - p_b + p_d \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $7 - p_d + p_t \geq 0$

流れからポテンシャルを作る：頑張って解く (1)

$p_s = 0,\ p_a = \quad,\ p_b = \quad,\ p_c = \quad,\ p_d = \quad,\ p_t =$

- $-2 - p_a + p_s \geq 0$
- $4 - p_s + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c + p_s \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $6 - p_c + p_b \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $-2 - p_b + p_d \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $7 - p_d + p_t \geq 0$

流れからポテンシャルを作る：頑張って解く (2)

$p_s = 0,\ p_a = \qquad,\ p_b = \qquad,\ p_c = \qquad,\ p_d = \qquad,\ p_t =$

- $-2 - p_a \geq 0$
- $4 + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $6 - p_c + p_b \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $-2 - p_b + p_d \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $7 - p_d + p_t \geq 0$

流れからポテンシャルを作る：頑張って解く (2)

$p_s = 0,\ p_a = \quad ,\ p_b = \quad ,\ p_c = \quad ,\ p_d = \quad ,\ p_t =$

- $-2 - p_a \geq 0$
- $4 + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $6 - p_c + p_b \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $-2 - p_b + p_d \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $7 - p_d + p_t \geq 0$

この 2 式より， $p_c = -4$

流れからポテンシャルを作る：頑張って解く (2)

$p_s = 0,\ p_a = \quad ,\ p_b = \quad ,\ p_c = -4,\ p_d = \quad ,\ p_t =$

- $-2 - p_a \geq 0$
- $4 + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $6 - p_c + p_b \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $-2 - p_b + p_d \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $7 - p_d + p_t \geq 0$

この 2 式より， $p_c = -4$

流れからポテンシャルを作る：頑張って解く (3)

$p_s = 0,\ p_a = \qquad,\ p_b = \qquad,\ p_c = -4,\ p_d = \qquad,\ p_t =$

- $-2 - p_a \geq 0$
- $4 + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $6 - p_c + p_b \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $-2 - p_b + p_d \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $7 - p_d + p_t \geq 0$

この 2 式より， $p_a = 1 + p_c = -3$

流れからポテンシャルを作る：頑張って解く (3)

$p_s = 0,\ p_a = -3,\ p_b = \quad,\ p_c = -4,\ p_d = \quad,\ p_t =$

- $-2 - p_a \geq 0$
- $4 + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $6 - p_c + p_b \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $-2 - p_b + p_d \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $7 - p_d + p_t \geq 0$

この 2 式より， $p_a = 1 + p_c = -3$

流れからポテンシャルを作る：頑張って解く (4)

$p_s = 0$, $p_a = -3$, $p_b =$, $p_c = -4$, $p_d =$, $p_t =$

- $-2 - p_a \geq 0$
- $4 + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $6 - p_c + p_b \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $-2 - p_b + p_d \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $7 - p_d + p_t \geq 0$

この 2 式より， $p_b = -6 + p_a = -9$

流れからポテンシャルを作る：頑張って解く (4)

$p_s = 0,\ p_a = -3,\ p_b = -9,\ p_c = -4,\ p_d = \quad ,\ p_t =$

- $-2 - p_a \geq 0$
- $4 + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $6 - p_c + p_b \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $-2 - p_b + p_d \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $7 - p_d + p_t \geq 0$

この 2 式より， $p_b = -6 + p_a = -9$

流れからポテンシャルを作る：頑張って解く (5)

$p_s = 0,\ p_a = -3,\ p_b = -9,\ p_c = -4,\ p_d = \quad,\ p_t =$

- $-2 - p_a \geq 0$
- $4 + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $6 - p_c + p_b \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $-2 - p_b + p_d \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $7 - p_d + p_t \geq 0$

この 2 式より， $p_d = -2 + p_c = -6$

流れからポテンシャルを作る：頑張って解く (5)

$p_s = 0,\ p_a = -3,\ p_b = -9,\ p_c = -4,\ p_d = -6,\ p_t =$

- $-2 - p_a \geq 0$
- $4 + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $6 - p_c + p_b \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $-2 - p_b + p_d \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $7 - p_d + p_t \geq 0$

この 2 式より， $p_d = -2 + p_c = -6$

流れからポテンシャルを作る：頑張って解く (6)

$p_s = 0,\ p_a = -3,\ p_b = -9,\ p_c = -4,\ p_d = -6,\ p_t =$

- $-2 - p_a \geq 0$
- $4 + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $6 - p_c + p_b \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $-2 - p_b + p_d \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $7 - p_d + p_t \geq 0$

この 2 式より， $p_t = -2 + p_b = -11$

流れからポテンシャルを作る：頑張って解く (6)

$p_s = 0,\ p_a = -3,\ p_b = -9,\ p_c = -4,\ p_d = -6,\ p_t = -11$

- $-2 - p_a \geq 0$
- $4 + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $6 - p_c + p_b \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $-2 - p_b + p_d \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $7 - p_d + p_t \geq 0$

この 2 式より， $p_t = -2 + p_b = -11$

流れからポテンシャルを作る：頑張って解く (7)

$p_s = 0,\ p_a = -3,\ p_b = -9,\ p_c = -4,\ p_d = -6,\ p_t = -11$

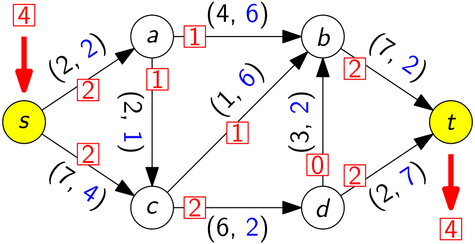
- $-2 - p_a \geq 0$
- $4 + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $6 - p_c + p_b \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $-2 - p_b + p_d \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $7 - p_d + p_t \geq 0$

計算された p_a, p_b, p_c, p_d, p_t は残りの式も全て満たす

したがって

これらはポテンシャルである

別の例でやってみる (1)



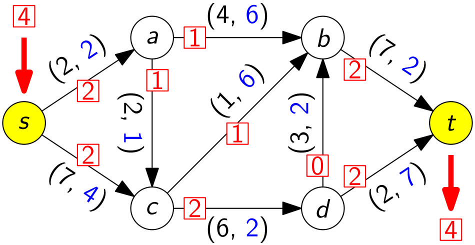
頂点 s, a, b, c, d, t **のポテンシャルをそれぞれ**

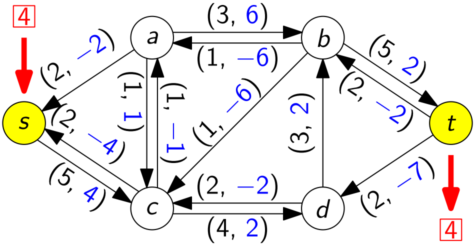
$$p_s, p_a, p_b, p_c, p_d, p_t$$

とする (ただし， $p_s = 0$)

別の例でやってみる (2)

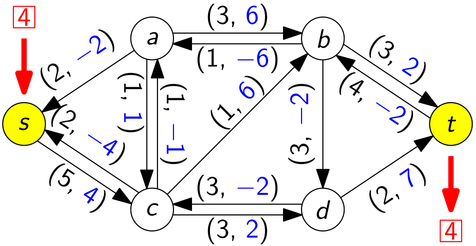
補助ネットワークを作ってみる





別の例でやってみる (3)

修正前費用 − 始点ポテンシャル + 終点ポテンシャル ≥ 0 なので



- $-2 - p_a + p_s \geq 0$
- $4 - p_s + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c + p_s \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $-6 - p_b + p_c \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $2 - p_d + p_b \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $-7 - p_t + p_d \geq 0$

別の例でやってみる：頑張って解く (1)

$p_s = 0,\ p_a = -3,\ p_b = -9,\ p_c = -4,\ p_d = -6,\ p_t = -11$

- $-2 - p_a + p_s \geq 0$
- $4 - p_s + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c + p_s \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $-6 - p_b + p_c \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $2 - p_d + p_b \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $-7 - p_t + p_d \geq 0$

等式関係となるところから， p_a, p_b, p_c, p_d, p_t **が決まる**

別の例でやってみる：頑張って解く (1)

$p_s = 0,\ p_a = -3,\ p_b = -9,\ p_c = -4,\ p_d = -6,\ p_t = -11$

- $-2 - p_a + p_s \geq 0$
- $4 - p_s + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c + p_s \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $-6 - p_b + p_c \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $2 - p_d + p_b \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $-7 - p_t + p_d \geq 0$

等式関係となるところから， p_a, p_b, p_c, p_d, p_t **が決まる**

別の例でやってみる：頑張って解く (1)

$p_s = 0,\ p_a = -3,\ p_b = -9,\ p_c = -4,\ p_d = -6,\ p_t = -11$

- $-2 - p_a + p_s \geq 0$
- $4 - p_s + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c + p_s \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $-6 - p_b + p_c \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $2 - p_d + p_b \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $-7 - p_t + p_d \geq 0$

等式関係となるところから， p_a, p_b, p_c, p_d, p_t **が決まる**

別の例でやってみる：頑張って解く (1)

$p_s = 0,\ p_a = -3,\ p_b = -9,\ p_c = -4,\ p_d = -6,\ p_t = -11$

- $-2 - p_a + p_s \geq 0$
- $4 - p_s + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c + p_s \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $-6 - p_b + p_c \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $2 - p_d + p_b \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $-7 - p_t + p_d \geq 0$

等式関係となるところから， p_a, p_b, p_c, p_d, p_t **が決まる**

別の例でやってみる：頑張って解く (1)

$p_s = 0,\ p_a = -3,\ p_b = -9,\ p_c = -4,\ p_d = -6,\ p_t = -11$

- $-2 - p_a + p_s \geq 0$
- $4 - p_s + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c + p_s \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $-6 - p_b + p_c \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $2 - p_d + p_b \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $-7 - p_t + p_d \geq 0$

等式関係となるところから， p_a, p_b, p_c, p_d, p_t **が決まる**

別の例でやってみる：頑張って解く (2)

$p_s = 0,\ p_a = -3,\ p_b = -9,\ p_c = -4,\ p_d = -6,\ p_t = -11$

- $-2 - p_a + p_s \geq 0$
- $4 - p_s + p_c \geq 0$
- $-4 - p_c + p_s \geq 0$
- $1 - p_a + p_c \geq 0$
- $-1 - p_c + p_a \geq 0$
- $6 - p_a + p_b \geq 0$
- $-6 - p_b + p_a \geq 0$
- $-6 - p_b + p_c \geq 0$
- $2 - p_c + p_d \geq 0$
- $-2 - p_d + p_c \geq 0$
- $2 - p_d + p_b \geq 0$
- $2 - p_b + p_t \geq 0$
- $-2 - p_t + p_b \geq 0$
- $-7 - p_t + p_d \geq 0$

しかし，$-7 - p_t + p_d = -2 < 0$ となり，満たされない式がある

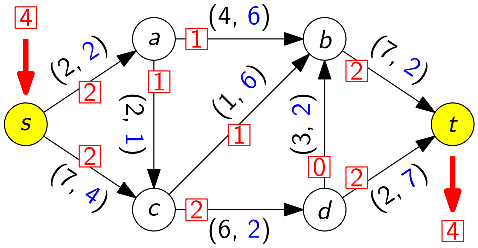
したがって

ポテンシャルが存在しない

定理：ポテンシャルによる最適性規準 (Ford, Fulkerson '62)

ポテンシャルが存在しない $\Leftrightarrow$ 最小費用流ではない

ポテンシャルが存在しない流れ



定理：ポテンシャルによる最適性規準 (Ford, Fulkerson '62)

ポテンシャルが存在しない $\Leftrightarrow$ 最小費用流ではない

- **つまり，この流れは最小費用流ではない**
- **一般に，ポテンシャルだけで最小費用流かどうかが分かる**

目次

今日のまとめと今後の予告

今日の目標

- 最小費用流問題の定義と解法を理解する
- 最小費用流問題を線形計画問題として定式化できるようになる
- 最小費用流問題を逐次最短路法によって解けるようになる
- 最小費用流問題の最適性をポテンシャルによって証明できる

重要な概念：最適性規準，整数流定理

今後の予告：ネットワークに関わる 3 つの最適化問題

済 最短路問題

済 最大流問題

　済 最大流問題の応用

済 最小費用流問題

- 最小費用流問題の応用 ← 次回と次々回

注：ネットワークに関わる最適化問題は他にもたくさんある

期末試験

日時

7 月 31 日 (水) 6 限

試験範囲

ネットワーク最適化 (1)〜(7)

- つまり，7 月 26 日の講義で扱う内容は試験で問われない

注意

- 60 点満点で，4 問出題する
- A4 用紙 1 枚 (両面自筆書き込み) は持ち込み可

目次